

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova di Geometria – 18 Gennaio 2016
Programma *De Finis* – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.
----	----	----	----	----	------	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

“Tyger! Tyger! Burning bright
In the forests of the night:
What immortal hand or eye
Could frame thy fearful symmetry?”
(The tyger, W. Blake)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l’annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, *supporti* cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Sia data l’applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita come:

$$f(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y; \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \right).$$

- (a) f è un’applicazione lineare invertibile.
- (b) f è un’applicazione lineare ortogonale.
- (c) f è un’applicazione lineare simmetrica.
- (d) Nessuna delle precedenti è vera .

A2) È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 102 & -17 \\ -102 & 0 & 321 \\ 17 & -321 & 0 \end{pmatrix}$. Allora

- (a) A^4 è antisimmetrica.
- (b) A^6 è invertibile.
- (c) A^8 ammette l’autovalore nullo.
- (d) A^{10} è ortogonale.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Un endomorfismo diagonalizzabile f di \mathbb{R}^4 ha l'autovalore 0 con molteplicità 2 e l'autovalore -2 che è semplice. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di \mathbb{R}^4 e sia Id l'identità su \mathbb{R}^4 .

V **F** Può accadere che $f(1, 2, -1, 0) = (-2, -4, 2, 0)$, $f(e_1 - 3e_2 + e_4) = (0, 0, 0, 0)$ e $f(e_1 + e_2 + 3e_3) = -2e_1 - 2e_2 - 6e_3$.

V **F** L'endomorfismo f può ammettere come polinomio caratteristico il polinomio $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 53$.

V **F** L'applicazione f può avere matrice associata $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto a una qualche base di \mathbb{R}^4 .

V **F** L'endomorfismo $f + 2Id$ di \mathbb{R}^4 ha nucleo di dimensione 1.

V **F** L'applicazione f può avere come autospazi $U = \mathcal{L}((1, -1, 1, -1), (1, 1, 0, 0))$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0, 2x + z + t = 0\}$.

B2) Sono dati i sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U = \mathcal{L}((0, 1, -1, -1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0))$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0, x + y - z + kt = 0, x - y = 0\}.$$

V **F** Per $k = 1$ si ha che $\dim(U \cap W) = 2$.

V **F** Per $k = 0$ risulta che $\dim(U + W)^\perp = 1$.

V **F** Per $k = 2$ si trova che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

V **F** Per $k = 1$ una base di W è $\{(1, 1, 2, 0)\}$.

B3) Nel piano sono dati i punti $A(0, -3)$, $B(0, 2)$ e $C(-2, 2)$.

V **F** Il triangolo ABC ha area 8.

V **F** Non esiste un'isometria del piano che trasforma A, B, C ordinatamente nei punti $A(-2, -1)$, $B(-1, -1)$ e $C(3, -1)$.

V **F** Esistono esattamente tre punti nel piano che completano il triangolo ABC ad un parallelogramma.

Esercizio 2. Si studi in tutti i dettagli la conica

$$\mathcal{C} : xy - y + 1 = 0.$$

(Si trovino, se ne ammette, centro, assi di simmetria, asintoti, una forma canonica, un'isometria che la trasforma nella sua forma canonica etc.)

Esercizio 3. Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, discutere e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 1 \\ hy + z = 0 \\ 2x - hz = -1 \end{cases}$$

Esercizio 4. (i) **(2pt)** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la distanza del piano $y - z = 0$

dalla retta $r : \begin{cases} x + ky = 1 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$

(ii) **(2pt)** Determinare, se esiste, un piano che contiene le rette $r : \begin{cases} x - y - 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$

e $s : \begin{cases} x = -10t \\ y = 2t + 11. \\ z = -6t \end{cases}$

(iii) **(2pt)** Costruire nel piano euclideo la circonferenza che ha per diametro i punti $A(-2, -1)$ e $B(1, 2)$

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito come:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_3 - x_3; x_1 + x_2 + x_3; 3x_1 + 2x_2).$$

(i) **(1pt)** Calcolare l'immagine secondo F del sottospazio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_4 = 0\}.$$

(ii) **(1pt)** Trovare la controimmagine secondo F del vettore $(-1, 0, 1)$.

(iii) **(2pt)** Trovare una base del nucleo e dell'immagine di F e dire se sono a somma diretta.

(iv) **(2pt)** Decidere se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.