Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova di Geometria – 21 Gennaio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Data una matrice A quadrata di ordine 3 e di rango 2, allora

(a) $A + A^T$ ha rango 2.
(b) $A^T + A$ ha rango al più 2.
(c) $\operatorname{rk}(A + A^T) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} A^T$.
(d) nessuna delle affermazioni precedenti è in generale corretta.

II) Siano dati nel piano i punti

$$A(1,1) \qquad B(2,0) \qquad C(3,3).$$

(a) Il triangolo di vertici A, B e C ha area 2.
(b) $\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \| = 6$.
(c) I punti A, B e C sono allineati.
(d) Il parallelogramma di lati $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ è un rettangolo.

III) La conica $\mathscr{C}:\ x^2 - xy - x + y^2 = 0$ è

(a) un punto.
(b) una parabola.
(c) unione di due rette.
(d) un'ellisse.

IV) Sia dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ così definito:

$$W = \mathcal{L}((1,0,0,-1),\ (0,1,0,1),\ (\pi,\pi,0,0)).$$

Allora

(a) $W^\perp$ è vuoto.

(b) $\dim W^\perp = 1$.

(c) $W^\perp = \mathcal{L}((1,-1,1,1), (0,0,2,0))$.

(d) $W^\perp = \mathcal{L}((-1,-1,1,1), (0,0,1,0))$.

V) Sono assegnati quattro numeri. Si sa che, sommando ciascuno di essi alla media aritmetica degli altri tre, si ottengono rispettivamente i numeri 25, 37, 43, 51. Qual è la media aritmetica dei quattro numeri assegnati?

(a) 17,5

(b) 19,5

(c) 23,5

(d) 29,5

Esercizio Facoltativo. In un riferimento cartesiano, si consideri una circonferenza $\mathscr{C}$ il cui centro è $C(0, \sqrt{2})$. Dimostrare che $\mathscr{C}$ contiene al massimo due punti con entrambe le coordinate razionali.

Esercizio 2. Si considerino i sistemi lineari

$$S: \begin{cases} x_1 - x_2 + kx_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (k-2)x_4 = k \end{cases} \qquad \text{e} \qquad SO: \begin{cases} x_1 - x_2 + kx_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (k-2)x_4 = 0 \end{cases}$$

(i) Discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema S.

(ii) Spiegare perché l'insieme U_k delle soluzioni del sistema SO non è vuoto ed è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare un supplemento di U_k in $\mathbb{R}^4$.

(iv) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, stabilire se esiste un isomorfismo $F : U_k \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(i) Scrivere esplicitamente le equazioni di F.

(ii) Determinare $\operatorname{Ker} F$ e $\operatorname{Im} F$ e stabilire se F è un automorfismo di $\mathbb{R}^4$.

(iii) Trovare gli autospazi di F e decidere se F è diagonalizzabile.

(iv) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} F \oplus \operatorname{Im} F$.

Esercizio 4. (i) Trovare, se esiste, un piano parallelo al piano $\pi: \; y+x-2=0$ e contenente la retta $r: \begin{cases} y+2x=0 \\ 2x-z+1=0. \end{cases}$

(ii) Trovare, se esiste, un piano passante per $P(-1,0,1)$ e parallelo alle rette $s_1: \begin{cases} x-2z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ e $s_2: \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0. \end{cases}$

(iii) Trovare nello spazio due rette sghembe r_1 e r_2 tali che $d(r_1, r_2)=1$ e tali che la perpendicolare comune ad r_1 e r_2 sia la retta $s: \begin{cases} z=0 \\ y=2. \end{cases}$

(*Suggerimento: un grafico può aiutare.*)

Esercizio 5. Sia data la curva algebrica piana irriducibile:

$$\mathscr{C}: \ x^2 + y^2 = x(x^2 - y^2).$$

(i) Determinare la retta tangente a $\mathscr{C}$ nei suoi punti di ascissa $x = -2$.

(ii) Che tipo di punto è l'origine per $\mathscr{C}$?

(iii) Trovare gli asintoti di $\mathscr{C}$.

(iv) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.