

Nome:	Mat.:
-------	-------

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare - pena l'annullamento della prova - note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Giustificare esaurientemente ogni risposta data.

Esercizio 1. Si considerino nello spazio euclideo i punti

$$A(1, -2, -1), \quad B(2, 1, 0) \quad C(1, 1, 1), \quad D(1, 1, -1)$$

- (a) (1pt) Stabilire se il triangolo CBD è rettangolo.
- (b) (1pt) Calcolare l'area del triangolo ABC .
- (c) (1pt) Trovare equazioni cartesiane e parametriche del piano in cui giace il triangolo ADC .
- (d) (2pt) Dire se esiste una sfera che passa per i punti A, B, C e D .

Esercizio 2. Sono dati i due sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- (a) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di U e W .
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.
- (c) (1pt) Stabilire se è vero che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.
- (d) (1pt) Calcolare una base ortonormale di W .

Esercizio 3. È data l'applicazione lineare F da \mathbb{R}^4 in $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ tale che

$$F(1, 0, 0, 0) = x^3 - x^2 \quad F(0, 1, 0, 0) = -x - 1 \quad F(0, 0, 1, 0) = x - x^4 + 1 \quad F(0, 0, 0, 1) = -x^4 + x^3 - x^2.$$

- (a) (1pt) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, invertibile.
- (b) (2pt) Calcolare basi e dimensioni di nucleo e immagine di F .
- (c) (2pt) Calcolare la controimmagine del vettore $v = x^3 + x^2 + 1$.

Esercizio 4. (4pt) Classificare e portare in forma canonica la conica euclidea

$$\mathcal{C} : x^2 - 4xy - 2y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$$

illustrando le isometrie usate.

Esercizio 5. Sia data la forma quadratica Q su \mathbb{R}^4 tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 - 2x_3x_4 - 2x_4^2.$$

- (i) (1pt) Stabilire se Q risulta degenere.
- (ii) (3pt) Calcolare una base di Sylvester per Q .
- (iii) (1pt) Calcolare la segnatura di Q .

Esercizio 6. (a) (3pt) Enunciare e dimostrare il teorema di Rouché-Capelli.

- (b) (2pt) Dare la definizione di somma di sottospazi vettoriali e dimostrare che è un sottospazio vettoriale.
- (c) (2pt) Dare la definizione di matrice simmetrica ed elencare le proprietà di una matrice simmetrica.