Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova3 di Geometria – 17 Febbraio 2017
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*Scendi giù bella scendi giù*
scendi giù bella scendi giù
dammi l'ultimo bacio che non tornerò più."
(A. Mannarino)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Le matrici A e B sono quadrate di ordine 19, simmetriche ed hanno determinante strettamente negativo. Quale tra le seguenti è falsa?

(a) La matrice $\sqrt{\frac{13}{7}}\,A - 14\,B$ è simmetrica.

(b) Il rango della matrice BA^4 è minore di 18.

(c) La matrice A^{2017} ha le colonne linearmente indipendenti.

(d) La matrice AB è invertibile.

A2) La conica
$$\mathscr{C}: \; x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 2y = 0$$

(a) è vuota.

(b) è un'ellisse generale.

(c) è un'iperbole non degenere.

(d) è degenere.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) La trasformazione $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + 2 \end{cases}$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ manda la retta $r:\ 2x + y - 1 = 0$ nella retta $r':\ x' + 4y' - 7 = 0$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ non è un'isometria.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ trasforma il punto $(1,1)$ in sé stesso.

B2) Sono dati nel piano euclideo i punti $A(2,1)$, $B(4,2)$ e $C(3,-1)$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il triangolo ABC ha perimetro di misura $\sqrt{20}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il triangolo ABC è rettangolo.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il triangolo ABC è isoscele.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il punto medio del segmento AB è il punto $M(3, \frac{3}{2})$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il triangolo ABC ha area di misura 5.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il vettore $\overrightarrow{AC} = (1,-2)$.

B3) Si consideri il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}[x,y]$ definito come:

$$W = \{ax^2 + bxy + (2b - a)x + by + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Una base di W è data da $\{-x^2 + x,\ xy + 2x + y,\ 2\}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Si ha che $\mathcal{L}(xy + 1, x^2 - y) \subset W$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che

$$F\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ k+1 & 0\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(i) (**1pt**) Al variare di k, determinare una base del nucleo di F.

(ii) (**1pt**) Decidere per quali valori di k l'endomorfismo F è suriettivo.

(iii) (**2pt**) Calcolare la controimmagine della matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, al variare di k.

(iv) (**1pt**) Provare che F non è diagonalizzabile per $k = 0$.

(v) (**1pt**) Posto $k = 1$, calcolare $(F \circ F)\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia data la forma quadratica Q su $\mathbb{R}^4$ tale che

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2kx_2x_3 + x_2^2 + 2(k-1)x_1x_4.$$

Siano poi dati i sottospazi vettoriali

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0,\ x_2 = 0\}$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$.

(i) (**1,5pt**) Determinare, al variare di k, la dimensione del sottospazio ortogonale di U fatto rispetto a Q.

(ii) (**1,5pt**) Determinare i valori di k per i quali Q risulta degenere.

(iii) (**1,5pt**) In corrispondenza dei valori di k trovati al punto precedente, calcolare la segnatura di Q.

(iv) (**1,5pt**) Trovare i vettori isotropi del sottospazio W quando $k = 1$.

Esercizio 4. Sono date nello spazio le due rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

(i) (**1pt**) Provare che r ed s sono propriamente parallele e determinare il piano in cui giacciono.

(ii) (**2pt**) Costruire, se esiste, una circonferenza tangente alle rette r ed s.

(iii) (**3pt**) Portare in forma canonica e classificare la quadrica

$$\mathcal{Q} :\ x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4y = 0.$$

Esercizio 5. Si consideri la curva algebrica piana affine

$$\mathscr{C} :\ 2x^3 + xy^2 - 4xy + y^2 = 0.$$

(a) (**2pt**) Provare che il solo punto singolare di $\mathscr{C}$ è l'origine e determinarne le tangenti principali.

(b) (**2pt**) Provare che $\mathscr{C}$ ammette un solo asintoto e determinarlo.

(c) (**2pt**) Calcolare la retta tangente a $\mathscr{C}$ nei suoi punti di ascissa $x = -1$.

(d) (**Facoltativo, 5pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.