Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova di Geometria – 18 Febbraio 2016
Programma 2014/15 – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"È bastato un momento per tagliare la testa di Lavoisier,
e forse non basterà un secolo per generarne un'altra pari alla sua"
(J.L. Lagrange)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.
Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la matrice A quadrata di ordine 7 il cui elemento generico è

$$a_{ij} = i \cdot j$$

Allora la matrice A

(a) è invertibile.
(b) non è diagonalizzabile.
(c) ha le colonne linearmente indipendenti.
(d) ammette l'autovalore nullo.

A2) Sia data la curva piana $\mathscr{C}: \; x^3 + x^2 + y^5 = 0$.

(a) La curva $\mathscr{C}$ è liscia.
(b) La curva $\mathscr{C}$ ammette asintoti.
(c) La curva $\mathscr{C}$ ha grafico limitato.
(d) Nessuna delle precedenti è corretta.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k, sono dati in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio W definito dal sistema lineare $\begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ e il sottospazio $U = \{(1,0,1,0),\ (k,k,0,0),\ (1,-1,0,k)\}$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = 1$ si ha che $U + W = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k \neq 0$ lo spazio $U^\perp$ non ammette base ortogonale.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per $k = 0$ risulta che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Per ogni $k \neq 0$ il sottospazio $U^\perp + W$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

B2) Sono dati nel piano i punti $P(1,1)$, $Q(-1,2)$ e la circonferenza $\mathscr{C}:\ x^2 + y^2 + 2x - y = -\dfrac{1}{4}$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La distanza tra P e Q vale 2,3.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'area del triangolo che ha per vertici l'origine, P e Q vale $\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'area del cerchio sotteso da $\mathscr{C}$ vale π.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il punto P non appartiene a $\mathscr{C}$.

B3) Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori di tipo $(1^m,\ 2^m,\ 3^m)$ al variare di $m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Lo spazio W ha dimensione infinita.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Lo spazio W è isomorfo al sottospazio $\{(a+b)x^4 - bx^3 + (a-2c)x + a + 2b \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}_{\leqslant 4}[x]$.

B4) È data la base ortogonale $\{u,\ v,\ w\}$ di $\mathbb{R}^3$. Allora

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ $\{u + 2w,\ (v \cdot u)v - w,\ w - v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ $\{3u,\ v - \dfrac{u \cdot v}{u \cdot u}u,\ u \wedge v\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Al variare di k in $\mathbb{R}$, discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + 2z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ (2k+2)x + z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia k un parametro reale. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito come

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+kb & ka-b+kc \\ 0 & kd \end{pmatrix}$$

(a) (**1pt**) Calcolare la dimensione dell'immagine di F al variare di k.

(b) (**1pt**) Trovare l'immagine diretta del sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) (**1pt**) Calcolare la controimmagine della matrice identica per $k = 1$.

(d) (**1pt**) Provare che F è diagonalizzabile per ogni valore di k.

(e) (**1pt**) Trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F quando $k = 0$.

(f) (**1pt**) Posto $k = 1$, determinare la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 4. (i) (**2pt**) Determinare, se esiste, un piano contenente le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = y + z \\ y = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 3y - z + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(ii) (**2pt**) Calcolare le distanze $d(r_1, r_2)$, $d(r_1, r_3)$, $d(r_3, r_2)$.

(iii) (**2pt**) Trovare una retta sghemba con r_3 e incidente r_1.

Esercizio 5. Sia data la conica euclidea $\mathscr{C} : 2x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 8y - 14 = 0$.

(i) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$.

(ii) (**2pt**) Determinare, se ne ammette, centro, assi di simmetria, asintoti di $\mathscr{C}$.

(iii) (**2pt**) Si determini una isometria che porta $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica euclidea.

(iv) (**1pt**) Stabilire se esiste una isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{C}' :\ xy + 101 = 0$.