

Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2015/16
Prova di Geometria – 18 Febbraio 2016
Programma DF – Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	Tot.
----	----	----	----	----	------

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:
-------	-------

*“È bastato un momento per tagliare la testa di Lavoisier,
e forse non basterà un secolo per generarne un'altra pari alla sua”*
(J.L. Lagrange)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. È consentito utilizzare soltanto la tabella delle superficie quadriche fornita dal docente. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la matrice A quadrata di ordine 7 il cui elemento generico è

$$a_{ij} = i \cdot j$$

Allora la matrice A

- (a) è invertibile.
- (b) non è diagonalizzabile.
- (c) ha le colonne linearmente indipendenti.
- (d) ammette l'autovalore nullo.

A2) Sia data la conica proiettiva piana $\mathcal{C} : X_0^2 + X_1X_2 - 2X_2^2 = 0$.

- (a) \mathcal{C} è degenere.
- (b) \mathcal{C} di tipo parabolico.
- (c) \mathcal{C} ha rango 1.
- (d) Nessuna delle precedenti è corretta.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale 0,5 punti, ogni risposta errata -0,25 punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Al variare del parametro reale k , sono dati in \mathbb{R}^4 il sottospazio W definito dal sistema

$$\text{lineare } \begin{cases} x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e il sottospazio } U = \{(1, 0, 1, 0), (k, k, 0, 0), (1, -1, 0, k)\}$$

- V** **F** Per $k = 1$ si ha che $U + W = \mathbb{R}^4$.
- V** **F** Per $k \neq 0$ lo spazio U^\perp non ammette base ortogonale.
- V** **F** Per $k = 0$ risulta che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.
- V** **F** Per ogni $k \neq 0$ il sottospazio $U^\perp + W$ è isomorfo a \mathbb{R}^3 .

B2) Sono dati nel piano i punti $P(1, 1)$, $Q(-1, 2)$ e la circonferenza $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - y = -\frac{1}{4}$

- V** **F** La distanza tra P e Q vale 2,3.
- V** **F** L'area del triangolo che ha per vertici l'origine, P e Q vale $\frac{3}{2}$.
- V** **F** L'area del cerchio sotteso da \mathcal{C} vale π .
- V** **F** Il punto P non appartiene a \mathcal{C} .

B3) Si consideri il piano $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$.

- V** **F** Il piano π contiene la retta $r : x + y = x + 1 = 0$.
- V** **F** Il piano π è parallelo alla retta $r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$
- V** **F** Il piano π è parallelo al piano $2x - y + z + 4 = 0$.
- V** **F** Il piano π contiene l'origine.

Esercizio 2. Al variare di k in \mathbb{R} , discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + 2z = 1 \\ 2x + y = 1 \\ (2k + 2)x + z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia k un parametro reale. Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito come

$$F(a, b, c, d) = (a + kb, ka - b + kc, 0, kd)$$

(a) **(1pt)** Calcolare la dimensione dell'immagine di F al variare di k .

(b) **(1pt)** Trovare l'immagine diretta del sottospazio

$$U = \left\{ (a + b + c, c, -c, a + b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) **(1pt)** Calcolare la controimmagine della matrice identica per $k = 1$.

(d) **(1pt)** Provare che F è diagonalizzabile per ogni valore di k .

(e) **(1pt)** Trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ costituita da autovettori per F quando $k = 0$.

(f) **(1pt)** Posto $k = 1$, determinare la matrice associata ad F rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4. (i) **(2pt)** Determinare, se esiste, un piano contenente le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = y + z \\ y = 0 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - 3y - z - 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad r_3 : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(ii) **(2pt)** Calcolare le distanze $d(r_1, r_2)$, $d(r_1, r_3)$, $d(r_3, r_2)$.

(iii) **(2pt)** Trovare una retta sghemba con r_3 e incidente r_1 .

Esercizio 5. Sia data la conica euclidea $\mathcal{C} : 2x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 8y - 4 = 0$.

(i) **(1pt)** Classificare \mathcal{C} .

(ii) **(2pt)** Determinare, se ne ammette, centro, assi di simmetria, asintoti di \mathcal{C} .

(iii) **(2pt)** Si determini una isometria che porta \mathcal{C} nella sua forma canonica euclidea.

(iv) **(1pt)** Stabilire se esiste una isometria che trasforma \mathcal{C} nella conica $\mathcal{C}' : xy + 101 = 0$.