Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova4 di Geometria – 20 Febbraio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sono dati nello spazio i punti

$$A(-1,1,0), \qquad B(-1,1,2), \qquad C(5,-1,2), \qquad D(5,-1,4).$$

V **F** L'area del triangolo ABC vale $2\sqrt{10}$.

V **F** Il quadrilatero $ABDC$ è un parallelogramma.

V **F** I punti A, B, C, D giacciono su un piano orizzontale.

II) Il sistema lineare $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$

V **F** è impossibile.

V **F** ammette almeno tre soluzioni.

V **F** definisce una retta nello spazio affine.

V **F** ammette la soluzione $(1,-1,-1)$.

III) Siano A e B due matrici antisimmetriche di ordine 3 e sia 0_3 la matrice nulla 3×3.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Se esiste, anche A^{-1} è antisimmetrica.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La matrice $-A + B^T + 0_3$ è simmetrica.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La matrice $A - A^T + B - B^T$ è antisimmetrica.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ La matrice B^5 è antisimmetrica.

IV) Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$U = \mathcal{L}((0,1,1,0),\ (1,2,-1,0),\ (1,-1,0,1))$$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = x_3,\ x_3 - x_2 + x_1 = 0\}.$$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il sottospazio $U \cap W$ è isomorfo al sottospazio $W^\perp$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Risulta che $\mathbb{R}^4 = U + W$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Si ottiene che $U^\perp \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ Il sottospazio $U + W^\perp$ ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x_1 = t - s + 2r \\ x_2 = t - 2r \\ x_3 = s - 2r \\ x_4 = s \end{cases}$

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ È possibile costruire un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ammette U come autospazio associato all'autovalore $\lambda = 0$ e W come autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$.

V) Sono dati in $\mathbb{R}^3$ tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ed un quarto vettore $\mathbf{b}$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{u} + 2\mathbf{v},\ \mathbf{w} - \mathbf{v},\ 3\mathbf{u} + \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{u},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v},\ -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v},\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\textbf{V}}$ $\boxed{\textbf{F}}$ L'insieme $\{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u},\ \mathbf{b},\ \mathbf{w} \wedge \mathbf{b}\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$:

$$p_1 = k^2 + kx + x^3 \qquad p_2 = 2 + x^2 + 3x^3 \qquad p_3 = 2 + kx + x^2 + 2x^3 \qquad p_4 = k + x^3$$

(i) (**2pt**) Posto $U = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, calcolare la dimensione di U al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k esiste un sottospazio $W \neq \{0\}$ tale che

$$U \oplus W = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]?$$

Determinare esplicitamente una base di W.

(iii) (**2pt**) Dati i polinomi

$$q_1 = 1 + kx \qquad \text{e} \qquad q_2 = k + kx^3,$$

sia $V = \mathcal{L}(q_1, q_2)$, lo spazio da esse generato. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dim (U \cap V) = 2.$$

(iv) (**1pt**) Per quali valori di k è possibile costruire un isomorfismo tra U e lo spazio

$$S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \subset \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})\,?$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x, y, z, t) = (x, \quad x - kt, \quad x - y + z - kt, \quad x - y)$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è invertibile?

(iii) (**1pt**) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione del nucleo di F.

(iv) (**2pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile?

(v) (**1pt**) Per $k = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo sono dati la retta $r : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ la retta

$s : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ ed il piano $\pi : \begin{cases} x = t - t' \\ y = -1 + t + t' \\ z = t' \end{cases}$.

(i) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $P \in s$ che disti $\frac{2}{\sqrt{6}}$ dal piano π.

(ii) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $Q \in r$ che disti 2 dal piano π.

(iii) (**1pt**) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(iv) (**1pt**) Determinare un piano passante per $P(-1, 1, 1)$ e contenente s.

(v) (**2pt**) Costruire, se esiste, un piano contenente r e parallelo ad s.

Esercizio 5. Sia data la conica:

$$\mathscr{C} : \; 3x^2 + 3y^2 - 2\,xy - 1 = 0.$$

(i) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(ii) (**2pt**) Trovare un'isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e dire di che tipo di isometria si tratta.

(iii) (**1pt**) Spiegare perché non esiste un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{G} : \; xy = 0$.

(iv) (**1pt**) Trovare i punti singolari della curva $\mathscr{C} \cup \mathscr{G}$.

(v) (**1pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

Esercizio Facoltativo. Studiare e disegnare la curva algebrica

$$\mathscr{X} : \; y^2 = x^2 - x^5.$$