Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova3 di Geometria – 20 Febbraio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sono dati nello spazio i punti

$$A(1,1,0), \qquad B(3,2,-1), \qquad C(1,3,0), \qquad D(-1,2,1).$$

V **F** Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

V **F** L'area del quadrilatero $ABCD$ vale 4.

V **F** I punti A, B, C, D sono complanari.

II) Siano A e B due matrici antisimmetriche di ordine 3 e sia 0_3 la matrice nulla 3×3.

V **F** La matrice costituita ordinatamente dai complementi algebrici degli elementi di A è anch'essa antisimmetrica.

V **F** La matrice $3A - 100B^T + 0_3$ è antisimmetrica.

V **F** La matrice $-A$ è simmetrica.

V **F** La matrice A^3 è antisimmetrica.

III) Il sistema lineare $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+2y=3 \\ 3x-2y+z=3 \end{cases}$

V **F** è indeterminato.

V **F** ammette tre soluzioni.

V **F** definisce un punto nello spazio affine.

V **F** ammette la soluzione $(1,1,2)$.

IV) Sono dati in $\mathbb{R}^3$ tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ ed un quarto vettore $\mathbf{a}$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{w}+\mathbf{v}+\mathbf{u},\ \mathbf{u}+3\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{w}-\mathbf{v},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{w}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u},\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{u}\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{w}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V) Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$U = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,2,-1,0),\ (1,1,0,-1))$$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \,|\, x_3 = x_4,\ x_1-x_2+x_3=0\}.$$

V **F** Il sottospazio $U\cap W$ ha codimensione uguale a 3.

V **F** Risulta che $\mathbb{R}^4 = U\oplus W$.

V **F** Si ottiene che $U^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$.

V **F** Il sottospazio $U^\perp + W$ ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x_1 = t-s \\ x_2 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = s+t \end{cases}$

V **F** È possibile costruire un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ha U come nucleo e W come immagine.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino i seguenti polinomi di $\mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]$:

$$p_1 = 1 + kx^3 \qquad p_2 = 2 + x + kx^2 + 2x^3 \qquad p_3 = 3 + x + 2x^3 \qquad p_4 = 1 + kx^2 + k^2x^3$$

(i) (**2pt**) Posto $U = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3, p_4)$, calcolare la dimensione di U al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k esiste un sottospazio $W \neq \{0\}$ tale che

$$U \oplus W = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[x]?$$

Determinare esplicitamente una base di W.

(iii) (**2pt**) Dati i polinomi

$$q_1 = 1 + kx \qquad \text{e} \qquad q_2 = k + kx^3,$$

sia $V = \mathcal{L}(q_1, q_2)$, lo spazio da essi generato. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dim(U \cap V) = 2.$$

(iv) (**1pt**) Per quali valori di k è possibile costruire un isomorfismo tra U e lo spazio

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 = 0\}\,?$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x, y, z, t) = (x, \quad -x + kz, \quad x + y, \quad x + y - kz + t)$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è iniettivo?

(iii) (**1pt**) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di $\operatorname{Im} F$.

(iv) (**2pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile?

(v) (**1pt**) Per $k = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo sono dati la retta $r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ la retta

$$s : \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ed il piano } \pi : \begin{cases} x = t - t' \\ y = 1 + 2t + t'. \\ z = t' \end{cases}$$

(i) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $P \in s$ che disti $\frac{1}{\sqrt{14}}$ dal piano π.

(ii) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $Q \in r$ che disti 3 dal piano π.

(iii) (**1pt**) Determinare, se esiste, un piano che contiene le rette r ed s.

(iv) (**1pt**) Determinare un piano passante per l'origine e parallelo ad r ed s.

(v) (**2pt**) Costruire, se esiste, un piano contenente r e parallelo ad s.

Esercizio 5. Sia data la conica:

$$\mathscr{C} : \; x^2 - 5y^2 + 6\sqrt{3}xy - 4 = 0.$$

(i) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(ii) (**2pt**) Trovare un'isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e dire di che tipo di isometria si tratta.

(iii) (**1pt**) Spiegare perché non esiste un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{S} : \; x^2 = 1$.

(iv) (**1pt**) Trovare i punti singolari della curva $\mathscr{C} \cup \mathscr{S}$.

(v) (**1pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

Esercizio Facoltativo. Studiare e disegnare la curva algebrica

$$\mathscr{W} : \; x^2 = y^3 - y^5.$$