Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2014/15
Prova di Geometria – 20 Febbraio 2015
Prof. Cigliola

1)	2)	3)	4)	5)	FAC.:

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome	Matricola

Esercizio 1. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

I) Sono dati nello spazio i punti

$$A(1,1,0), \qquad B(3,2,-1), \qquad C(1,3,0), \qquad D(-1,2,1).$$

V **F** Il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

V **F** I punti A, B, C, D giacciono su un piano verticale.

V **F** L'area del quadrilatero $ABCD$ vale $4,4$.

II) Il sistema lineare
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+2y=3 \\ 3x-2y+z=3 \end{cases}$$

V **F** è impossibile.

V **F** ammette tre soluzioni di cui due sono coincidenti.

V **F** definisce una retta nello spazio affine.

V **F** ammette la soluzione $(1,1,2)$.

III) Siano A e B due matrici simmetriche di ordine 3 e sia I_3 la matrice identica 3×3.

V **F** La matrice costituita ordinatamente dai complementi algebrici degli elementi di A è anch'essa simmetrica.

V **F** La matrice $3A - 100B^T + I_3$ è simmetrica.

V **F** La matrice BA è simmetrica.

V **F** La matrice A^3 è simmetrica.

IV) Sono dati in $\mathbb{R}^3$ tre vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ed un quarto vettore $\mathbf{b}$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{w}+\mathbf{v},\ \mathbf{u}+\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{w}-\mathbf{v},\ \mathbf{u}-\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{w}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

V **F** L'insieme $\{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u},\ \mathbf{b}\}$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

V) Siano dati in $\mathbb{R}^4$ i due sottospazi

$$U = \mathcal{L}((1,1,0,0),\ (1,2,-1,0),\ (1,1,0,1))$$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_3 = x_4,\ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

V **F** Il sottospazio $U \cap W$ è isomorfo al sottospazio $U^\perp$.

V **F** Risulta che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

V **F** Si ottiene che $U^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$.

V **F** Il sottospazio $U^\perp + W$ ha equazioni parametriche date da $\begin{cases} x_1 = t - s + 2r \\ x_2 = t - 2r \\ x_3 = s - 2r \\ x_4 = 0 \end{cases}$

V **F** È possibile costruire un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che ammette U come nucleo e W come autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si considerino le seguenti matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^2 \end{pmatrix}$$

(i) (**2pt**) Posto $U = \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, A_4)$, calcolare la dimensione di U al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k esiste un sottospazio $W \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ tale che

$$U \oplus W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})?$$

Determinare esplicitamente una base di W.

(iii) (**2pt**) Date le matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

sia $V = \mathcal{L}(B, C)$, lo spazio da esse generato. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dim (U \cap V) = 2.$$

(iv) (**1pt**) Per quali valori di k è possibile costruire un isomorfismo tra U e lo spazio

$$T = \mathcal{L}(1 + 2x,\ -1 + x + 3x^2,\ 3x + x^2) \subset \mathbb{R}[x]\,?$$

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$F(x, y, z, t) = (ky + t, \quad x - t, \quad x - ky + z - t, \quad t)$$

(i) (**1pt**) Determinare la matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(ii) (**1pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è un automorfismo?

(iii) (**1pt**) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di $\operatorname{Im} F$.

(iv) (**2pt**) Per quali valori di k l'endomorfismo F è diagonalizzabile?

(v) (**1pt**) Per $k = 1$, trovare una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per F.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo sono dati la retta $r: \begin{cases} x+z-1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ la retta

$$s: \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad \text{ed il piano } \pi: \begin{cases} x=t-t' \\ y=-1+2t+t'. \\ z=t' \end{cases}$$

(i) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $P \in s$ che disti $\frac{1}{\sqrt{14}}$ dal piano π.

(ii) (**1pt**) Trovare, se esiste, un punto $Q \in r$ che disti 1 dal piano π.

(iii) (**1pt**) Stabilire la posizione reciproca tra r ed s.

(iv) (**1pt**) Determinare un piano passante per l'origine e parallelo ad r ed s.

(v) (**2pt**) Costruire, se esiste, un piano contenente r e ortogonale ad s.

Esercizio 5. Sia data la conica:

$$\mathscr{C}: \; x^2+y^2-6xy+2=0.$$

(i) (**1pt**) Classificare $\mathscr{C}$ e trovare una sua forma canonica $\mathscr{C}_0$.

(ii) (**2pt**) Trovare un'isometria f che trasforma $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}_0$ e dire di che tipo di isometria si tratta.

(iii) (**1pt**) Spiegare perché non esiste un'isometria che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica $\mathscr{D}: \; xy=0$.

(iv) (**1pt**) Trovare i punti singolari della curva $\mathscr{C} \cup \mathscr{D}$.

(v) (**1pt**) Tracciare il grafico di $\mathscr{C}$.

Esercizio Facoltativo. Studiare e disegnare la curva algebrica

$$\mathscr{Q}: \; y^2 = x^3 - x^5.$$