Sapienza Università di Roma – Facoltà ICI
Laurea in Ingegneria Energetica A.A. 2016/17
Prova1 di Analisi Matematica II – 22 Giugno 2017

1)	2)	3)	4)	5)	Fac.	Tot.

N.B. La parte sovrastante è riservata al docente.

Nome:	Mat.:

"*La velocità della luce non si decide per alzata di mano.*"
(P. Angela)

AVVERTENZE. Non è consentito utilizzare, pena l'annullamento della prova, note, libri di testo, appunti, calcolatrici, cellulari, tablet, supporti cartacei o elettronici in genere. Le risposte del primo esercizio non vanno giustificate. Tutte le altre sì ed in maniera chiara e concisa.

Esercizio 1.

Parte A. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 2 punti, ogni risposta errata −1 punto ed ogni risposta non data 0 punti.

A1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2+1)+1 & \text{per } \ -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{per } x = -\pi, 0 \\ -\log(x^2+1)-1 & \text{per } \ \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

definita in $[-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità su tutto l'asse reale. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Fourier di $f(x)$.

(a) La funzione f è continua.
(b) Si trova che il coefficiente $a_{101} = 0$.
(c) La funzione S è discontinua per $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
(d) Si ha che $S(1) = 0$.

A2) Sono date la forma differenziale

$$\omega = (e^{x+y} + 4x)\, dx \ + \ e^{x+y}\, dy$$

e la curva parametrica

$$\gamma : \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 17\sin t \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

(a) L'integrale di ω lungo γ vale 0.
(b) La primitiva f di ω che vale 1 nell'origine è $f(x,y) = e^{x+y} + 1$.
(c) La curva gamma non è regolare.
(d) La forma ω non è chiusa.

Parte B. Si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false. Ogni risposta esatta vale $0,5$ punti, ogni risposta errata $-0,25$ punti ed ogni risposta non data 0 punti.

B1) Si consideri il sottoinsieme dello spazio

$$A \overset{\text{def}}{=} [-1,2) \times \{1\} \times (1,3].$$

V **F** L'insieme A ha per frontiera un rettangolo.

V **F** L'insieme A è aperto.

V **F** Tutti i punti dell'insieme A sono punti di accumulazione per A.

V **F** L'insieme A è chiuso.

V **F** L'insieme A è illimitato.

B2) Sia data la funzione $f(x) = e^{-x^2}$. Sia poi $S(x)$ la funzione somma della serie di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$.

V **F** Si ha che $S'(3) = \dfrac{1}{3}$.

V **F** Si ha che $f^{(8)}(0) = -\dfrac{8!}{4!}$.

V **F** $f^{(127)}(0) = 0$.

B3) Sono dati il campo vettoriale

$$\mathbf{E} = (3yz + 2x)\,\mathbf{i} + 3xz\,\mathbf{j} + 3xy\,\mathbf{k},$$

e i tre punti

$$A(1,1,-5) \qquad B(1,-2,2) \qquad C(2,-1,-1).$$

V **F** Si ha che $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

V **F** Detto ∂T il (bordo del) triangolo ABC percorso in verso orario, si ha che $\int_{\partial T} \mathbf{E}\cdot ds = -3$.

V **F** Si ha che $\int_{AB} \mathbf{E} \cdot ds = -\int_{BA} \mathbf{E} \cdot ds$, dove i segmenti si intendono orientati dal primo estremo verso il secondo.

V **F** La divergenza di $\mathbf{E}$ vale costantemente 2.

Esercizio 2. Calcolare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\, 3^n}{n^2}\, x^n.$$

Calcolare inoltre l'insieme di convergenza della sua serie derivata.

Esercizio 3. Si consideri la curva descritta dall'equazione

$$\mathscr{C}: \; x^3 + xy^2 + 4xy + y^2 = 0,$$

e sia $P_0(-1, -\frac{1}{4}) \in \mathscr{C}$.

(i) (**1pt**) Provare che esiste una funzione reale di variabile reale $y = \phi(x)$ il cui grafico coincide *localmente* con il grafico di $\mathscr{C}$ in un intorno del punto P_0.

(ii) (**1pt**) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di ϕ nel punto P_0.

(iii) (**2pt**) Calcolare il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine di punto iniziale P_0 della funzione ϕ.

(iv) (**2pt**) Dimostrare che i punti regolari di $\mathscr{C}$ per i quali la retta tangente è parallela alla bisettrice $y = x$ sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 4xy + y^2 = 0 \\ 3x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 6y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) (**3pt**) Stabilire se la funzione f è continua nell'origine.

(ii) (**3pt**) Calcolare i punti stazionari di f lungo la retta $x + 2y + 1 = 0$.

Esercizio 5. Si consideri la regione dello spazio

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leqslant 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2\}.$$

(i) (**2pt**) Rappresentare graficamente W.

(ii) (**2pt**) Determinare il baricentro di W.

(iii) (**2pt**) Calcolare l'area della superficie di W.

Esercizio Facoltativo. (10pt.) Si dimostri il seguente risultato.
Teorema (di Gauss). Sia dato nel piano il poligono $\mathcal{P}$ con $n \geqslant 3$ lati i cui vertici sono i punti

$$P_1 = (x_1, y_1) \qquad P_2 = (x_2, y_2) \qquad \dots \qquad P_n = (x_n, y_n).$$

Allora l'area di $\mathcal{P}$ è data dalla formula:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \, |\, x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - \cdots - y_nx_1 \,|.$$