Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica
GE210-Geometria 2 – A.A. 2015-2016
APPELLO B

Esercizio 1. Si consideri la quadrica

$$\mathscr{Q}:\ 2xy + 2xz - 2z + 1 = 0.$$

(a) Portare in forma canonica e classificare la quadrica $\mathscr{Q}$.

(b) Determinare, se esistono, due rette sghembe interamente contenute in $\mathscr{Q}$.

(c) Determinare, se esiste, un piano che interseca la quadrica $\mathscr{Q}$ in una parabola non degenere.

Esercizio 2. Data una matrice quadrata $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si ponga $\mathrm{tr}A = a + d$, che è detta la *traccia* di A. Si considerino le seguenti forme quadratiche su $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$Q_1(A) = \mathrm{tr}(A^T A) \qquad Q_2(A) = \mathrm{tr}(A^2), \qquad \text{con } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(a) Provare che Q_1 è definita positiva.

(b) Diagonalizzare Q_2 e determinare la sua segnatura.

(c) Dimostrare che l'endomorfismo $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da $f(A) = A^T + A$, per ogni $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, è simmetrico rispetto a Q_1.

(d) Trovare una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ di autovettori per f ortonormale rispetto a Q_1.

(e) Calcolare al variare di k il complemento ortogonale rispetto a Q_2 del sottospazio $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a + b + kc \\ b - c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Esercizio 3. (a) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si dia la forma canonica della conica proiettiva

$$\mathscr{C} : \alpha X_0^2 + X_1^2 + 2(\alpha + 1)X_0X_1 = 0$$

(b) Costruire una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa la retta $X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$ punto per punto.

Esercizio 4. Sia data la conica euclidea $\mathscr{C} : 2x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 8y - 14 = 0$.

(a) Classificare $\mathscr{C}$.

(b) Determinare, se ne ammette, centro, assi di simmetria, asintoti di $\mathscr{C}$.

(c) Determinare una isometria che porta $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica euclidea.

(d) Determinare una affinità che trasforma $\mathscr{C}$ nella sua forma canonica affine.

Esercizio 5. Nello spazio sono date le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = y + z \\ y = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 3y - z + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare la distanza tra r_1 ed r_2.

(b) Determinare, se esiste, un piano contenente le rette r_1, r_2, r_3.

(c) Trovare le equazioni delle circonferenze tangenti a r_2 ed r_3 aventi il centro su r_1

Esercizio 6. Si considerino nel piano affine reale il punto $A(1,-1)$ e le rette

$$r:\ x=0 \qquad s:\ y=1 \qquad t:\ y=-3x$$

Determinare, se esiste, un'affinità f tale che $f(A)=A$, $f(r)=r$, $f(s)=t$ e $f(t)=s$.