

Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2018-2019
Esercizi foglio n.6

Esercizio 1. Determinare tutte le relazioni di equivalenza sugli insiemi $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ a, b, c, d \}$.

Esercizio 2. Siano S e T insiemi non vuoti e sia $f : S \rightarrow T$ un'applicazione iniettiva. Sia \mathcal{F} una partizione di S . Provare che l'insieme

$$\mathcal{F}^* = \{ f(X) \mid X \in \mathcal{F} \}$$

realizza una partizione di $\text{Im } f$. Provare inoltre che la iniettività di f è una condizione necessaria.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^4 \in \mathbb{Q}$. Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su \mathbb{Z} e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita come

$$f(n) = \begin{cases} n^2 - 2 & n \geq 2 \\ n + 2 & n \leq 1. \end{cases}$$

Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su \mathbb{Z} e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ n^2 - 1 & n > 0. \end{cases}$$

Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su \mathbb{Z} e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 6. Sia X un insieme e sia $B \subsetneq X$ un sottoinsieme non vuoto di X . Si consideri la funzione

$$f : A \in \mathcal{P}(X) \rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(X).$$

(i) Dire se f è iniettiva.

(ii) Dire se f è suriettiva.

(iii) Calcolare la controimmagine $f^{-1}(\{ B, X, \emptyset \})$.

(iv) Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su $\mathcal{P}(X)$ e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 7. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^2 \in \mathbb{Z}$. Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su \mathbb{Z} e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 8. Si consideri la funzione $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^4 \in \mathbb{Q}$. Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da f su \mathbb{Z} e il relativo insieme quoziente.

Esercizio 9. Si consideri in \mathbb{Z} la relazione binaria \mathcal{R} tale che $a\mathcal{R}b$ se e solo se $a^2 - b^2$ è multiplo di 4. Provare che \mathcal{R} è una relazione di equivalenza, determinare esplicitamente la classe di equivalenza di 3 modulo \mathcal{R} e trovare l'insieme quoziente \mathbb{Z}/\mathcal{R} .