

Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica  
AL110-Algebra 1 - A.A. 2018-2019  
Esercizi foglio n.4

**Esercizio 1.** Per ciascuna delle seguenti relazioni, riconoscere che si tratta di una relazione di equivalenza e descrivere il relativo insieme quoziente:

- (i) similitudine nell'insieme dei triangoli del piano;
- (ii) parallelismo tra le rette del piano;
- (iii) fissato un insieme  $X$  ed un suo sottoinsieme  $E$ , presi  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ , sia  $A\mathcal{R}B$  se e solo se  $A \cap E = B \cap E$
- (iv) in  $\mathbb{R}$  sia  $x\mathcal{R}x'$  se e solo se  $x - x' \in \mathbb{Z}$
- (v) in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0, 0) \}$ , sia  $(x, y)\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y})$  se e solo se  $\bar{x}^2 y = x^2 \bar{y}$

**Esercizio 2.** Determinare tutte le relazioni di equivalenza sugli insiemi  $A = \{ a, b, c \}$  e  $B = \{ a, b, c, d \}$ .

**Esercizio 3.** Siano  $S$  e  $T$  insiemi non vuoti e sia  $f : S \rightarrow T$  un'applicazione iniettiva. Sia  $\mathcal{F}$  una partizione di  $S$ . Provare che l'insieme

$$\mathcal{F}^* = \{ f(X) \mid X \in \mathcal{F} \}$$

realizza una partizione di  $\text{Im } f$ . Provare inoltre che la iniettività di  $f$  è una condizione necessaria.

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione  $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^4 \in \mathbb{Q}$ . Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da  $f$  su  $\mathbb{Z}$  e il relativo insieme quoziente.

**Esercizio 5.** Si consideri la funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definita come

$$f(n) = \begin{cases} n^2 - 2 & n \geq 2 \\ n + 2 & n \leq 1. \end{cases}$$

Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da  $f$  su  $\mathbb{Z}$  e il relativo insieme quoziente.

**Esercizio 6.** Si consideri la funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  definita come

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ n^2 - 1 & n > 0. \end{cases}$$

Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da  $f$  su  $\mathbb{Z}$  e il relativo insieme quoziente.

**Esercizio 7.** Sia  $X$  un insieme e sia  $B \subsetneq X$  un sottoinsieme non vuoto di  $X$ . Si consideri la funzione

$$f : A \in \mathcal{P}(X) \rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(X).$$

- (i) Dire se  $f$  è iniettiva.
- (ii) Dire se  $f$  è suriettiva.
- (iii) Calcolare la controimmagine  $f^{-1}(\{ B, X, \emptyset \})$ .
- (iv) Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da  $f$  su  $\mathcal{P}(X)$  e il relativo insieme quoziente.

**Esercizio 8.** Si consideri la funzione  $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^2 \in \mathbb{Z}$ . Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da  $f$  su  $\mathbb{Z}$  e il relativo insieme quoziente.

**Esercizio 9.** Si consideri la funzione  $f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow x^4 \in \mathbb{Q}$ . Descrivere in tutti i dettagli la relazione nucleo indotta da  $f$  su  $\mathbb{Z}$  e il relativo insieme quoziente.

**Esercizio 10.** Si consideri in  $\mathbb{Z}$  la relazione binaria  $\mathcal{R}$  tale che  $a\mathcal{R}b$  se e solo se  $a^2 - b^2$  è multiplo di 4. Provare che  $\mathcal{R}$  è una relazione di equivalenza, determinare esplicitamente la classe di equivalenza di 3 modulo  $\mathcal{R}$  e trovare l'insieme quoziente  $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ .