

Università Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
AL110-Algebra 1 - A.A. 2017-2018 – prof. Cigliola
Esercizi foglio n.4

Esercizio 1. Sia dato $X = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ ordinato secondo la divisibilità. Sia poi $Y = \{3, 6, 8\}$ e $Z = \{4, 8\}$. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo, gli elementi massimali e gli elementi minimali di X . Trovare maggioranti e minoranti, estremo superiore ed inferiore di Y e Z . Rappresentare poi il diagramma di Hasse di X .

Esercizio 2. Rappresentare graficamente il diagramma di Hasse dell'insieme delle parti di $X = \{a, b\}$ ordinato secondo l'inclusione insiemistica.

Esercizio 3. Sia $X = \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\})$. Si consideri in esso la relazione \leq così definita:

$$Y \leq Z \iff Y = Z \text{ oppure } y|z, \text{ per ogni } y \in Y \text{ e } z \in Z.$$

- (i) Provare che \leq è una relazione d'ordine su X .
- (ii) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo di X .
- (iii) Esibire, se esiste, una catena infinita di X .
- (iv) Determinare estremo superiore e inferiore in X dell'insieme $Y = \{\{2, 4\}, \{12\}, \{5, 7\}\}$.
- (v) Determinare estremo superiore e inferiore in X dell'insieme $Y = \{\{m\} \mid m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$.
- (vi) Sia $r \in \mathbb{N}, r \neq 0$. Provare che l'insieme $R = \{rk \mid k \in \mathbb{N}, k \neq 0\}$ è un elemento massimale in X .