

## Esercizio

Consideriamo il problema del tempo di attesa per un autobus. Sia  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  un campione casuale, dove  $X_i$  è il tempo di attesa (riportato dal app) in una fermata di Roma scelta a caso. Assumiamo che i  $X_i$  siano indipendenti e identicamente distribuiti. Assumiamo per il momento che  $X_i$  abbia la distribuzione con funzione di densità

$$f(y | \theta) = \theta^2 y e^{-\theta y}, \quad y \geq 0 \text{ e } \theta > 0. \quad (1)$$

- a. Identificare la statistica sufficiente minimale.
- b. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$ .

Adesso consideriamo il campione (sono dati veri)

$$X = (1, 4, 6, 5, 25, 4, 3, 3, 9, 2, 1, 1, 7, 10, 1).$$

Note che  $\bar{X} = 5,47$ . (Potete fare l'approssimazione a due cifre decimali.)

- c. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\mathbb{E}(X_i)$ , il valore atteso del tempo di attesa dell'autobus.
- d. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per  $\theta$ .
- e. Usando il intervallo di confidenza ottenuto sopra, si accetterebbe l'ipotesi nulla che  $\mathbb{E}(X_i) \leq 10$ ?

Adesso consideriamo anche un'altro campione

$$Y = (1, 1, 2, 3, 21, 1, 11, 11, 20, 2, 17, 8, 4).$$

Note che  $\bar{Y} = 7,85$ .

- f. Assumendo che  $Y$  venga anche dalla distribuzione con funzione di densità (1) ma con parametro  $\lambda$ , identificare una variabile aleatoria che abbia la distribuzione di Fisher e sia una funzione di  $X$  e  $Y$ .
- g. Identificare un test per verificare l'ipotesi nulla che  $\theta = \lambda$  con livello di significatività 0,05. Il test accetta l'ipotesi nulla?  
Suggerimento: usare la variabile aleatoria della domanda precedente e il fatto che la probabilità che una variabile aleatoria  $F(60, 52)$  sia più grandi di 1,566 è 0,05.

Adesso assumiamo che  $Y$  venga da un modello di regressione lineare dato  $X$ , cioè  $Y_i \sim N(\alpha + \beta X_i, \sigma^2)$ , per  $i \in \{1, 2, \dots, 13\}$ , dove  $\alpha, \beta$  e  $\sigma^2$  sono parametri incogniti. Potete usare l'informazione che

$$S_{x,x} = \sum_{i=1}^{13} (X_i - \bar{X}')^2 = 485,23 \quad \text{e} \quad S_{x,y} = \sum_{i=1}^{13} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 306,92,$$

dove  $\bar{X}' = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} X_i = 5,46$ .

- h. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\alpha, \beta$  e  $\sigma^2$ .
- i. Determinare il test che verifica l'ipotesi nulla che  $\beta = 0$  con livello di significatività 0,05. Questo test, quando applicato ai valori di  $X$  e  $Y$  scritti sopra, accetta l'ipotesi nulla?
- j. Trovare il intervallo di confidenza più piccolo al 95% per  $Y_{14}$  e  $Y_{15}$ .

La funzione cummulativa della distribuzione (1) è

$$F(y | \theta) = 1 - e^{-\theta y} (1 + \theta y),$$

quindi se usiamo l'approssimazione  $\frac{2}{\bar{X}} = 0,37$ , si ottiene che

$$F(3 | 0,37) = 0,30, \quad F(6 | 0,37) = 0,65 \quad \text{e} \quad F(9 | 0,37) = 0,84.$$

Adesso non facciamo nessuna ipotesi sulla distribuzione di  $X$  e  $Y$ . Rappresentiamo i campioni  $X$  e  $Y$  usando il seguente istogramma:

| Campione | Numero di elementi in ogni intervallo |        |        |                 |
|----------|---------------------------------------|--------|--------|-----------------|
|          | [0, 3]                                | [4, 6] | [7, 9] | [10, $\infty$ ) |
| X        | 7                                     | 4      | 2      | 2               |
| Y        | 6                                     | 1      | 1      | 5               |

- k. Il test *goodness-of-fit* con livello di significatività asintotico 0,05 accetterebbe l'ipotesi che  $X$  venga dalla distribuzione con funzione di densità (1)? Assumiamo in questo esercizio che la distribuzione con densità (1) soddisfa tutte le proprietà di regolarità necessarie.
- l. Vedendo la tabella sopra come una tabella di contingenza, si accetterebbe con livello di significatività asintotico 0,05 l'ipotesi che non esista una correlazione tra le righe e le colonne, cioè che la tabella sia distribuita come una tabella scelta a caso dato le somme di ognuna riga e di ognuna colonna?

*Indicazione delle soluzioni.*

- a.  $n\bar{X}$ , note che  $\frac{f_n(x|\theta)}{f_n(y|\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^n x_i \exp(-\theta n\bar{x})}{\prod_{i=1}^n y_i \exp(-\theta n\bar{y})}$  non dipende da  $\theta$  se e solo se  $\bar{x} = \bar{y}$ .
- b. Scrivere la densità, dire perchè i punti estremi non possono essere stimatore di massima verosimiglianza, prendere il log, derivare e uguagliare a zero. Tutto questo ci porta a  $\hat{\theta} = \frac{2}{\bar{X}}$ .
- c. Come  $X_i$  è Gamma(2,  $\theta$ ), sappiamo che  $\mathbb{E}(X_i) = \frac{2}{\theta}$ . Allora lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\mathbb{E}(X_i)$  è  $\frac{2}{\bar{X}} = \bar{X} = 5,47$ .
- d. Note che  $2\theta n\bar{X} \sim \chi^2(4n)$ . Allora, con probabilità 95% sappiamo che  $2\theta n\bar{X} \leq 79.082$ . Quindi, abbiamo il intervallo di confidenza  $[0, 0,482]$ .
- e. Questo test equivale a controllare se  $\theta \geq 1/5$ . Il intervallo calcolato nella domanda precedente ha confidenza 95%, allora la stessa che vogliamo per il test di questa domanda (livello di significatività 0,05). Allora possiamo usare il intervallo di confidenza per definire la regione critica  $\mathcal{C} = \{x: [1/5, \infty) \cap I(x) = \emptyset\}$ , dove per i dati  $X$  abbiamo  $I(X) = [0, 0,482]$ , il intervallo ottenuta nella domanda precedente. Quindi, come  $[1/5, \infty)$  intersecca  $[0, 0,482]$ , l'ipotesi nulla viene accettata.

- f. La distribuzione di Fisher è il rapporto di due variabili  $\chi^2$  indipendente. Allora,  $2015\bar{X}$  e  $2\lambda 13\bar{Y}$  sono  $\chi^2$ . Otteniamo che

$$\frac{\theta\bar{X}}{\lambda\bar{Y}} = \frac{\frac{2015\bar{X}}{4.15}}{\frac{2\lambda 13\bar{Y}}{4.13}} \sim F(60, 52).$$

- g. Il test avrà regione critica  $\mathcal{C} = \left\{x, y: \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \geq 1,566\right\}$ . Come il rapporto è 0,697, il test accetta l'ipotesi nulla.
- h. Otteniamo che  $S_{x,y} = 306,92$  e  $S_{x,x} = 485,23$ . Quindi,  $\hat{\beta} = \frac{S_{x,y}}{S_{x,x}} = 0,633$  e  $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}' = 4,39$  (dove  $\bar{X}'$  è la media dei primi 13 elementi di  $X$ ). E  $\hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2 = 36,73$ .
- i. Ricordiamo che  $\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{S_{x,x}})$ . Allora,  $\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{x,x}}} \sim t\text{-Student}(n-2)$  con  $\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-2} \hat{\sigma}_{\text{MLE}}^2 = 43,41$ . La  $t$ -Student è simmetrica intorno alla origine, allora controlliamo la tabella per 11 gradi di libertà al 97.5%, che ci porta al valore 2,201. Allora, sotto l'ipotesi nulla, abbiamo che

$$\mathbb{P}\left(-2,201 \leq \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{x,x}}} \leq 2,201\right) = 0,95.$$

Come  $\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{x,x}} = 0,3$  e  $\hat{\beta} = 0,633$ , otteniamo che  $\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{x,x}}} = 2,11$ . Quindi, si accetta l'ipotesi nulla (per molto pocco, ma si accetta). La regione critica del test è

$$\mathcal{C} = \left\{x, y: \left| \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{x,x}}} \right| > 2,201\right\}.$$

La soluzione finisce qua. Ma come la domanda non specifica quale test fare, sarebbe anche giusto trovare un intervallo dalla forma  $(-\infty, c)$ ; cioè, provare a scegliere  $c$  tale che

$$\mathbb{P}\left(-\infty \leq \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/S_{x,x}}} \leq c\right) = 0,95.$$

In questo caso, uno controlla la tabella della  $t$ -Student(11) al 95%, trovando  $c = 1,796$ .

- j. Ci ricordiamo che  $Y_0 \sim N\left(\alpha + \beta X_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - X_0)^2}{S_{x,x}}\right)\right)$ . Allora,

$$\hat{Y}_{14} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{14} = 10,69 \quad \text{e} \quad \hat{Y}_{15} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_{15} = 5,02.$$

Questo implica che

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{(\bar{X} - X_0)^2}{S_{x,x}}}} \sim t\text{-Student}(n-2) = t\text{-Student}(11).$$

Usiamo nuovamente il valore 2,201 per la  $t$ -Student(11), che è unimodale. Allora, otteniamo che

$$\sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{(\bar{X} - X_0)^2}{S_{x,x}}} = 1,06 \text{ per } Y_{14} \text{ e } Y_{15}.$$

Usando che  $\hat{\sigma} = 6.59$ , otteniamo che

$$|Y_{14} - 10,69| \leq 2,201 \cdot 6,59 \cdot 1,06 = 15,37, \text{ e}$$

$$|Y_{15} - 5,02| \leq 2,201 \cdot 6,59 \cdot 1,06 = 15,37,$$

con probabilità 95%.

- k. Questo esercizio è un pò più complicato. Nel esame, potete trovare domande come il esempio del genotipo fatto in lezione (dove la distribuzione era discreta). Il caso di una distribuzione continua, come in questo esercizio, è un pò più elaborato. Vogliamo applicare il test goodness-of-fit, ma la distribuzione con densità (1) è continua. Allora, la discretizziamo conforme la tabella scritta nella domanda. Cioè, definiamo i intervalli

$$I_1 = [0, 3], \quad I_2 = (3, 6], \quad I_3 = (6, 9], \quad I_4 = (9, \infty).$$

Sia

$$N_j = \sum_{i=1}^{15} \mathbf{1}(X_i \in I_j), \quad \text{per } j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Per il test goodness-of-fit dobbiamo calcolare

$$\pi_j(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X_i \in I_j),$$

dove la probabilità è misurata con rispetto alla distribuzione (1). Quindi,

$$\pi_1(\theta) = F(3 | \theta), \quad \pi_2(\theta) = F(6 | \theta) - F(3 | \theta),$$

$$\pi_3(\theta) = F(9 | \theta) - F(6 | \theta), \quad \pi_4(\theta) = 1 - F(9 | \theta).$$

Allora, il test goodness-of-fit consiste in calcolare la statistica

$$\sum_{j=1}^4 \frac{(N_j - n\pi_j(\hat{\theta}))^2}{n\pi_j(\hat{\theta})}. \quad (2)$$

Ma attenzione! Lo stimatore  $\hat{\theta}$  da usare non è quello ottenuto nella domanda (a), perchè dopo la procedura di discretizzazione, i dati sono  $N_j$ , non  $X_i$ . Questo vuol dire che lo stimatore di  $\theta$  deve essere ottenuto per la densità delle variabile  $N_j$ , che sono multinomiale. Allora, la loro densità sarà

$$\prod_{j=1}^4 \pi_j(\theta)^{N_j}.$$

Come i punti estremi del parametro  $\theta$  non possono essere punti di massima (questo deve sempre essere controllato e giustificato!), si può prendere il log e la derivata per ottenere lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$  e poi usarlo nella statistica scritta in (2). (Non facciamo il calcolo perchè non viene una equazione molto trattabile analiticamente; mio sbaglio.) Come questa statistica converge alla  $\chi^2(k - s - 1)$  (dove, in questo caso,  $k = 4$  e  $s = 1$ ), dobbiamo paragonare il valore della statistica con il valore della  $\chi^2(2)$  al 95%, che è 5,991.

1. Se assumiamo l'ipotesi nulla, allora dato le marginali (cioè, la somma di ogni riga e di ogni colonna) il valore atteso del elemento  $(i, j)$  della tabella è

$$\frac{15 \cdot 13}{28} = 6,96, \quad \frac{15 \cdot 5}{28} = 2,68, \quad \frac{15 \cdot 3}{28} = 1,61, \quad \frac{15 \cdot 7}{28} = 3,75$$

per la prima riga e

$$\frac{13 \cdot 13}{28} = 6,04, \quad \frac{13 \cdot 5}{28} = 2,32, \quad \frac{13 \cdot 3}{28} = 1,39, \quad \frac{13 \cdot 7}{28} = 3,25$$

per la seconda riga. Allora, la statistica sarà

$$\underbrace{0 + 0,65 + 0,09 + 0,82}_{\text{prima riga}} + \underbrace{0 + 0,75 + 0,11 + 0,94}_{\text{seconda riga}} = 3,36.$$

Come la statistica converge alla distribuzione  $\chi^2(1 \cdot 3)$ , il valore della tabella è 7,815 e l'ipotesi nulla viene accettata.

◁

## Tabella con le principali distribuzioni di probabilità

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Y \sim \mathbf{Bernoulli}(p), \quad p \in [0, 1]$ $f(y) = p^y(1-p)^{1-y}, \quad y \in \{0, 1\}$ $\mathbb{E}(Y) = p, \quad \text{Var}(Y) = p(1-p).$                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $Y \sim \mathbf{Binomiale}(n, p), \quad p \in [0, 1], n \in \{1, 2, \dots\}$ $f(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \quad y \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $\mathbb{E}(Y) = np, \quad \text{Var}(Y) = np(1-p).$                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $Y \sim \mathbf{Uniforme}(a, b), \quad a, b \in (0, \infty) \text{ con } a < b$ $f(y) = \frac{1}{b-a}, \quad y \in [a, b]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}.$                                                                                                                                                                                                                                         | $Y \sim \mathbf{Beta}(\alpha, \beta), \quad a, b \in (0, \infty)$ $f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}, \quad y \in [0, 1]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$                                                                                                                                                                                |
| $Y \sim \mathbf{Geometrica}(p), \quad p \in [0, 1]$ $f(y) = (1-p)^{y-1} p, \quad y \in \{1, 2, \dots\}$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$                                                                                                                                                                                                                                                                 | $Y \sim \mathbf{Poisson}(\lambda), \quad \lambda \in (0, \infty)$ $f(y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}, \quad y \in \{0, 1, \dots\}$ $\mathbb{E}(Y) = \lambda, \quad \text{Var}(Y) = \lambda.$                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $Y \sim \mathbf{Esponenziale}(\lambda), \quad \lambda \in (0, \infty)$ $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \in [0, \infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$                                                                                                                                                                                                                               | $Y \sim \mathbf{Gamma}(\alpha, \beta), \quad a, b \in (0, \infty)$ $f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}, \quad y \in [0, \infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$                                                                                                                                                                                                                                       |
| $Y \sim \chi^2(k), \quad k \in (0, \infty)$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\chi^2(k)</math> è equivalente a <math>\text{Gamma}\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                          | $Y \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \mu \in (-\infty, \infty), \sigma^2 \in (0, \infty)$ $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(Y) = \mu, \quad \text{Var}(Y) = \sigma^2.$                                                                                                                                                                                                                                       |
| $Y \sim F(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in (0, \infty)$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>Y = \frac{W/\alpha}{W'/\beta}</math>, dove <math>W \sim \chi^2(\alpha)</math>, <math>W' \sim \chi^2(\beta)</math> e <math>W</math> è indipendente di <math>W'</math>.</li> </ul>                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $Y \sim \mathbf{Pareto}(\alpha), \quad \alpha \in (1, \infty)$ $f(y) = (\alpha-1)y^{-\alpha}, \quad y \in [1, \infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & \text{se } \alpha > 2 \\ \infty, & \text{altrimenti} \end{cases},$ $\text{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}, & \text{se } \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha \in (2, 3] \\ \text{non definita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$ | $Y \sim t\text{-Student}(k), \quad k \in (0, \infty)$ $f(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 1 \\ \text{non definito}, & \text{altrimenti} \end{cases},$ $\text{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{k}{k-2}, & \text{se } k > 2 \\ \infty, & k \in (1, 2] \\ \text{non definita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$ |

**Tabella della  $N(0, 1)$**

Il valore della linea  $\alpha$  e collona  $\beta$  è uguale a  $y$  se per  $Y \sim N(0, 1)$  si ottiene  $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha + \beta$ .

[illegible]

## Tabella della $t$ -Student( $k$ )

Il valore della linea  $k$  e collona  $\alpha$  è uguale a  $y$  se per  $Y \sim t\text{-Student}(k)$  si ottiene  $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$ .

| Gradi di libertà | 80%   | 85%   | 90%   | 95%   | 97.5%  | 99%    | 99.5%  |
|------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1                | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2                | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303  | 6.965  | 9.925  |
| 3                | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182  | 4.541  | 5.841  |
| 4                | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776  | 3.747  | 4.604  |
| 5                | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571  | 3.365  | 4.032  |
| 6                | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447  | 3.143  | 3.707  |
| 7                | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365  | 2.998  | 3.499  |
| 8                | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306  | 2.896  | 3.355  |
| 9                | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262  | 2.821  | 3.250  |
| 10               | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228  | 2.764  | 3.169  |
| 11               | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201  | 2.718  | 3.106  |
| 12               | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179  | 2.681  | 3.055  |
| 13               | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160  | 2.650  | 3.012  |
| 14               | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145  | 2.624  | 2.977  |
| 15               | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131  | 2.602  | 2.947  |
| 16               | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120  | 2.583  | 2.921  |
| 17               | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110  | 2.567  | 2.898  |
| 18               | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101  | 2.552  | 2.878  |
| 19               | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093  | 2.539  | 2.861  |
| 20               | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086  | 2.528  | 2.845  |
| 28               | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048  | 2.467  | 2.763  |
| 29               | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045  | 2.462  | 2.756  |
| 30               | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042  | 2.457  | 2.750  |
| 38               | 0.851 | 1.051 | 1.304 | 1.686 | 2.024  | 2.429  | 2.712  |
| 39               | 0.851 | 1.050 | 1.304 | 1.685 | 2.023  | 2.426  | 2.708  |
| 40               | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021  | 2.423  | 2.704  |
| 48               | 0.849 | 1.048 | 1.299 | 1.677 | 2.011  | 2.407  | 2.682  |
| 49               | 0.849 | 1.048 | 1.299 | 1.677 | 2.010  | 2.405  | 2.680  |
| 50               | 0.849 | 1.047 | 1.299 | 1.676 | 2.009  | 2.403  | 2.678  |
| 58               | 0.848 | 1.046 | 1.296 | 1.672 | 2.002  | 2.392  | 2.663  |
| 59               | 0.848 | 1.046 | 1.296 | 1.671 | 2.001  | 2.391  | 2.662  |
| 60               | 0.848 | 1.045 | 1.296 | 1.671 | 2.000  | 2.390  | 2.660  |
| 78               | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.665 | 1.991  | 2.375  | 2.640  |
| 79               | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990  | 2.374  | 2.640  |
| 80               | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990  | 2.374  | 2.639  |
| 98               | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.661 | 1.984  | 2.365  | 2.627  |
| 99               | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984  | 2.365  | 2.626  |
| 100              | 0.845 | 1.042 | 1.290 | 1.660 | 1.984  | 2.364  | 2.626  |
| 198              | 0.843 | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.972  | 2.345  | 2.601  |
| 199              | 0.843 | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.972  | 2.345  | 2.601  |
| 200              | 0.843 | 1.039 | 1.286 | 1.653 | 1.972  | 2.345  | 2.601  |
| 498              | 0.842 | 1.038 | 1.283 | 1.648 | 1.965  | 2.334  | 2.586  |
| 499              | 0.842 | 1.038 | 1.283 | 1.648 | 1.965  | 2.334  | 2.586  |
| 500              | 0.842 | 1.038 | 1.283 | 1.648 | 1.965  | 2.334  | 2.586  |
| 998              | 0.842 | 1.037 | 1.282 | 1.646 | 1.962  | 2.330  | 2.581  |
| 999              | 0.842 | 1.037 | 1.282 | 1.646 | 1.962  | 2.330  | 2.581  |
| 1000             | 0.842 | 1.037 | 1.282 | 1.646 | 1.962  | 2.330  | 2.581  |



## Tabella della $\chi^2(k)$

Il valore della linea  $k$  e collona  $\alpha$  è uguale a  $y$  se per  $Y \sim \chi^2(k)$  si ottiene  $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$ .

| Gradi di libertà | 1%      | 5%      | 10%     | 80%      | 90%      | 95%      | 99%      |
|------------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|
| 1                | 0.000   | 0.004   | 0.016   | 1.642    | 2.706    | 3.841    | 6.635    |
| 2                | 0.020   | 0.103   | 0.211   | 3.219    | 4.605    | 5.991    | 9.210    |
| 3                | 0.115   | 0.352   | 0.584   | 4.642    | 6.251    | 7.815    | 11.345   |
| 4                | 0.297   | 0.711   | 1.064   | 5.989    | 7.779    | 9.488    | 13.277   |
| 5                | 0.554   | 1.145   | 1.610   | 7.289    | 9.236    | 11.070   | 15.086   |
| 6                | 0.872   | 1.635   | 2.204   | 8.558    | 10.645   | 12.592   | 16.812   |
| 7                | 1.239   | 2.167   | 2.833   | 9.803    | 12.017   | 14.067   | 18.475   |
| 8                | 1.646   | 2.733   | 3.490   | 11.030   | 13.362   | 15.507   | 20.090   |
| 9                | 2.088   | 3.325   | 4.168   | 12.242   | 14.684   | 16.919   | 21.666   |
| 10               | 2.558   | 3.940   | 4.865   | 13.442   | 15.987   | 18.307   | 23.209   |
| 11               | 3.053   | 4.575   | 5.578   | 14.631   | 17.275   | 19.675   | 24.725   |
| 12               | 3.571   | 5.226   | 6.304   | 15.812   | 18.549   | 21.026   | 26.217   |
| 13               | 4.107   | 5.892   | 7.042   | 16.985   | 19.812   | 22.362   | 27.688   |
| 14               | 4.660   | 6.571   | 7.790   | 18.151   | 21.064   | 23.685   | 29.141   |
| 15               | 5.229   | 7.261   | 8.547   | 19.311   | 22.307   | 24.996   | 30.578   |
| 16               | 5.812   | 7.962   | 9.312   | 20.465   | 23.542   | 26.296   | 32.000   |
| 17               | 6.408   | 8.672   | 10.085  | 21.615   | 24.769   | 27.587   | 33.409   |
| 18               | 7.015   | 9.390   | 10.865  | 22.760   | 25.989   | 28.869   | 34.805   |
| 19               | 7.633   | 10.117  | 11.651  | 23.900   | 27.204   | 30.144   | 36.191   |
| 20               | 8.260   | 10.851  | 12.443  | 25.038   | 28.412   | 31.410   | 37.566   |
| 28               | 13.565  | 16.928  | 18.939  | 34.027   | 37.916   | 41.337   | 48.278   |
| 29               | 14.256  | 17.708  | 19.768  | 35.139   | 39.087   | 42.557   | 49.588   |
| 30               | 14.953  | 18.493  | 20.599  | 36.250   | 40.256   | 43.773   | 50.892   |
| 38               | 20.691  | 24.884  | 27.343  | 45.076   | 49.513   | 53.384   | 61.162   |
| 39               | 21.426  | 25.695  | 28.196  | 46.173   | 50.660   | 54.572   | 62.428   |
| 40               | 22.164  | 26.509  | 29.051  | 47.269   | 51.805   | 55.758   | 63.691   |
| 48               | 28.177  | 33.098  | 35.949  | 55.993   | 60.907   | 65.171   | 73.683   |
| 49               | 28.941  | 33.930  | 36.818  | 57.079   | 62.038   | 66.339   | 74.919   |
| 50               | 29.707  | 34.764  | 37.689  | 58.164   | 63.167   | 67.505   | 76.154   |
| 58               | 35.913  | 41.492  | 44.696  | 66.816   | 72.160   | 76.778   | 85.950   |
| 59               | 36.698  | 42.339  | 45.577  | 67.894   | 73.279   | 77.931   | 87.166   |
| 60               | 37.485  | 43.188  | 46.459  | 68.972   | 74.397   | 79.082   | 88.379   |
| 78               | 51.910  | 58.654  | 62.483  | 88.271   | 94.374   | 99.617   | 109.958  |
| 79               | 52.725  | 59.522  | 63.380  | 89.338   | 95.476   | 100.749  | 111.144  |
| 80               | 53.540  | 60.391  | 64.278  | 90.405   | 96.578   | 101.879  | 112.329  |
| 98               | 68.396  | 76.164  | 80.541  | 109.547  | 116.315  | 122.108  | 133.476  |
| 99               | 69.230  | 77.046  | 81.449  | 110.607  | 117.407  | 123.225  | 134.642  |
| 100              | 70.065  | 77.929  | 82.358  | 111.667  | 118.498  | 124.342  | 135.807  |
| 198              | 154.665 | 166.444 | 172.964 | 214.524  | 223.892  | 231.829  | 247.212  |
| 199              | 155.548 | 167.361 | 173.900 | 215.567  | 224.957  | 232.912  | 248.329  |
| 200              | 156.432 | 168.279 | 174.835 | 216.609  | 226.021  | 233.994  | 249.445  |
| 498              | 427.535 | 447.251 | 458.007 | 524.348  | 538.849  | 551.023  | 574.346  |
| 499              | 428.461 | 448.199 | 458.967 | 525.375  | 539.890  | 552.075  | 575.419  |
| 500              | 429.388 | 449.147 | 459.926 | 526.401  | 540.930  | 553.127  | 576.493  |
| 998              | 897.017 | 925.668 | 941.190 | 1035.393 | 1055.667 | 1072.606 | 1104.865 |
| 999              | 897.964 | 926.631 | 942.161 | 1036.412 | 1056.695 | 1073.643 | 1105.917 |
| 1000             | 898.912 | 927.594 | 943.133 | 1037.431 | 1057.724 | 1074.679 | 1106.969 |

## Tabella della distribuzione di Fisher con $\alpha = 0.95$

Il valore della linea  $j$  e collona  $i$  è uguale a  $y$  se per  $Y \sim F(i, j)$  si ottiene  $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$ .

|      | 1       | 2       | 4       | 5       | 9       | 10      | 14      | 15      | 19      | 20      |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1    | 161.448 | 199.500 | 224.583 | 230.162 | 240.543 | 241.882 | 245.364 | 245.950 | 247.686 | 248.013 |
| 2    | 18.513  | 19.000  | 19.247  | 19.296  | 19.385  | 19.396  | 19.424  | 19.429  | 19.443  | 19.446  |
| 3    | 10.128  | 9.552   | 9.117   | 9.013   | 8.812   | 8.786   | 8.715   | 8.703   | 8.667   | 8.660   |
| 4    | 7.709   | 6.944   | 6.388   | 6.256   | 5.999   | 5.964   | 5.873   | 5.858   | 5.811   | 5.803   |
| 5    | 6.608   | 5.786   | 5.192   | 5.050   | 4.772   | 4.735   | 4.636   | 4.619   | 4.568   | 4.558   |
| 6    | 5.987   | 5.143   | 4.534   | 4.387   | 4.099   | 4.060   | 3.956   | 3.938   | 3.884   | 3.874   |
| 7    | 5.591   | 4.737   | 4.120   | 3.972   | 3.677   | 3.637   | 3.529   | 3.511   | 3.455   | 3.445   |
| 8    | 5.318   | 4.459   | 3.838   | 3.687   | 3.388   | 3.347   | 3.237   | 3.218   | 3.161   | 3.150   |
| 9    | 5.117   | 4.256   | 3.633   | 3.482   | 3.179   | 3.137   | 3.025   | 3.006   | 2.948   | 2.936   |
| 10   | 4.965   | 4.103   | 3.478   | 3.326   | 3.020   | 2.978   | 2.865   | 2.845   | 2.785   | 2.774   |
| 11   | 4.844   | 3.982   | 3.357   | 3.204   | 2.896   | 2.854   | 2.739   | 2.719   | 2.658   | 2.646   |
| 12   | 4.747   | 3.885   | 3.259   | 3.106   | 2.796   | 2.753   | 2.637   | 2.617   | 2.555   | 2.544   |
| 13   | 4.667   | 3.806   | 3.179   | 3.025   | 2.714   | 2.671   | 2.554   | 2.533   | 2.471   | 2.459   |
| 14   | 4.600   | 3.739   | 3.112   | 2.958   | 2.646   | 2.602   | 2.484   | 2.463   | 2.400   | 2.388   |
| 15   | 4.543   | 3.682   | 3.056   | 2.901   | 2.588   | 2.544   | 2.424   | 2.403   | 2.340   | 2.328   |
| 16   | 4.494   | 3.634   | 3.007   | 2.852   | 2.538   | 2.494   | 2.373   | 2.352   | 2.288   | 2.276   |
| 17   | 4.451   | 3.592   | 2.965   | 2.810   | 2.494   | 2.450   | 2.329   | 2.308   | 2.243   | 2.230   |
| 18   | 4.414   | 3.555   | 2.928   | 2.773   | 2.456   | 2.412   | 2.290   | 2.269   | 2.203   | 2.191   |
| 19   | 4.381   | 3.522   | 2.895   | 2.740   | 2.423   | 2.378   | 2.256   | 2.234   | 2.168   | 2.155   |
| 20   | 4.351   | 3.493   | 2.866   | 2.711   | 2.393   | 2.348   | 2.225   | 2.203   | 2.137   | 2.124   |
| 29   | 4.183   | 3.328   | 2.701   | 2.545   | 2.223   | 2.177   | 2.050   | 2.027   | 1.958   | 1.945   |
| 30   | 4.171   | 3.316   | 2.690   | 2.534   | 2.211   | 2.165   | 2.037   | 2.015   | 1.945   | 1.932   |
| 39   | 4.091   | 3.238   | 2.612   | 2.456   | 2.131   | 2.084   | 1.954   | 1.931   | 1.860   | 1.846   |
| 40   | 4.085   | 3.232   | 2.606   | 2.449   | 2.124   | 2.077   | 1.948   | 1.924   | 1.853   | 1.839   |
| 49   | 4.038   | 3.187   | 2.561   | 2.404   | 2.077   | 2.030   | 1.899   | 1.876   | 1.803   | 1.789   |
| 50   | 4.034   | 3.183   | 2.557   | 2.400   | 2.073   | 2.026   | 1.895   | 1.871   | 1.798   | 1.784   |
| 59   | 4.004   | 3.153   | 2.528   | 2.371   | 2.043   | 1.995   | 1.863   | 1.839   | 1.766   | 1.751   |
| 60   | 4.001   | 3.150   | 2.525   | 2.368   | 2.040   | 1.993   | 1.860   | 1.836   | 1.763   | 1.748   |
| 69   | 3.980   | 3.130   | 2.505   | 2.348   | 2.019   | 1.971   | 1.838   | 1.814   | 1.739   | 1.725   |
| 70   | 3.978   | 3.128   | 2.503   | 2.346   | 2.017   | 1.969   | 1.836   | 1.812   | 1.737   | 1.722   |
| 79   | 3.962   | 3.112   | 2.487   | 2.330   | 2.001   | 1.953   | 1.819   | 1.795   | 1.720   | 1.705   |
| 80   | 3.960   | 3.111   | 2.486   | 2.329   | 1.999   | 1.951   | 1.817   | 1.793   | 1.718   | 1.703   |
| 89   | 3.948   | 3.099   | 2.474   | 2.317   | 1.987   | 1.939   | 1.804   | 1.780   | 1.705   | 1.690   |
| 90   | 3.947   | 3.098   | 2.473   | 2.316   | 1.986   | 1.938   | 1.803   | 1.779   | 1.703   | 1.688   |
| 99   | 3.937   | 3.088   | 2.464   | 2.306   | 1.976   | 1.928   | 1.793   | 1.769   | 1.693   | 1.678   |
| 100  | 3.936   | 3.087   | 2.463   | 2.305   | 1.975   | 1.927   | 1.792   | 1.768   | 1.691   | 1.676   |
| 109  | 3.928   | 3.080   | 2.455   | 2.298   | 1.967   | 1.919   | 1.784   | 1.759   | 1.683   | 1.668   |
| 110  | 3.927   | 3.079   | 2.454   | 2.297   | 1.966   | 1.918   | 1.783   | 1.758   | 1.682   | 1.667   |
| 119  | 3.921   | 3.072   | 2.448   | 2.290   | 1.959   | 1.911   | 1.776   | 1.751   | 1.675   | 1.659   |
| 120  | 3.920   | 3.072   | 2.447   | 2.290   | 1.959   | 1.910   | 1.775   | 1.750   | 1.674   | 1.659   |
| 499  | 3.860   | 3.014   | 2.390   | 2.232   | 1.899   | 1.850   | 1.712   | 1.686   | 1.607   | 1.592   |
| 500  | 3.860   | 3.014   | 2.390   | 2.232   | 1.899   | 1.850   | 1.712   | 1.686   | 1.607   | 1.592   |
| 999  | 3.851   | 3.005   | 2.381   | 2.223   | 1.889   | 1.840   | 1.702   | 1.676   | 1.597   | 1.581   |
| 1000 | 3.851   | 3.005   | 2.381   | 2.223   | 1.889   | 1.840   | 1.702   | 1.676   | 1.597   | 1.581   |

## Tabella della distribuzione di Fisher con $\alpha = 0.99$

Il valore della linea  $j$  e collona  $i$  è uguale a  $y$  se per  $Y \sim F(i, j)$  si ottiene  $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$ .

|      | 1        | 2        | 4        | 5        | 9        | 10       | 14       | 15       | 19       | 20       |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1    | 4052.181 | 4999.500 | 5624.583 | 5763.650 | 6022.473 | 6055.847 | 6142.674 | 6157.285 | 6200.576 | 6208.730 |
| 2    | 98.503   | 99.000   | 99.249   | 99.299   | 99.388   | 99.399   | 99.428   | 99.433   | 99.447   | 99.449   |
| 3    | 34.116   | 30.817   | 28.710   | 28.237   | 27.345   | 27.229   | 26.924   | 26.872   | 26.719   | 26.690   |
| 4    | 21.198   | 18.000   | 15.977   | 15.522   | 14.659   | 14.546   | 14.249   | 14.198   | 14.048   | 14.020   |
| 5    | 16.258   | 13.274   | 11.392   | 10.967   | 10.158   | 10.051   | 9.770    | 9.722    | 9.580    | 9.553    |
| 6    | 13.745   | 10.925   | 9.148    | 8.746    | 7.976    | 7.874    | 7.605    | 7.559    | 7.422    | 7.396    |
| 7    | 12.246   | 9.547    | 7.847    | 7.460    | 6.719    | 6.620    | 6.359    | 6.314    | 6.181    | 6.155    |
| 8    | 11.259   | 8.649    | 7.006    | 6.632    | 5.911    | 5.814    | 5.559    | 5.515    | 5.384    | 5.359    |
| 9    | 10.561   | 8.022    | 6.422    | 6.057    | 5.351    | 5.257    | 5.005    | 4.962    | 4.833    | 4.808    |
| 10   | 10.044   | 7.559    | 5.994    | 5.636    | 4.942    | 4.849    | 4.601    | 4.558    | 4.430    | 4.405    |
| 11   | 9.646    | 7.206    | 5.668    | 5.316    | 4.632    | 4.539    | 4.293    | 4.251    | 4.123    | 4.099    |
| 12   | 9.330    | 6.927    | 5.412    | 5.064    | 4.388    | 4.296    | 4.052    | 4.010    | 3.883    | 3.858    |
| 13   | 9.074    | 6.701    | 5.205    | 4.862    | 4.191    | 4.100    | 3.857    | 3.815    | 3.689    | 3.665    |
| 14   | 8.862    | 6.515    | 5.035    | 4.695    | 4.030    | 3.939    | 3.698    | 3.656    | 3.529    | 3.505    |
| 15   | 8.683    | 6.359    | 4.893    | 4.556    | 3.895    | 3.805    | 3.564    | 3.522    | 3.396    | 3.372    |
| 16   | 8.531    | 6.226    | 4.773    | 4.437    | 3.780    | 3.691    | 3.451    | 3.409    | 3.283    | 3.259    |
| 17   | 8.400    | 6.112    | 4.669    | 4.336    | 3.682    | 3.593    | 3.353    | 3.312    | 3.186    | 3.162    |
| 18   | 8.285    | 6.013    | 4.579    | 4.248    | 3.597    | 3.508    | 3.269    | 3.227    | 3.101    | 3.077    |
| 19   | 8.185    | 5.926    | 4.500    | 4.171    | 3.523    | 3.434    | 3.195    | 3.153    | 3.027    | 3.003    |
| 20   | 8.096    | 5.849    | 4.431    | 4.103    | 3.457    | 3.368    | 3.130    | 3.088    | 2.962    | 2.938    |
| 29   | 7.598    | 5.420    | 4.045    | 3.725    | 3.092    | 3.005    | 2.767    | 2.726    | 2.599    | 2.574    |
| 30   | 7.562    | 5.390    | 4.018    | 3.699    | 3.067    | 2.979    | 2.742    | 2.700    | 2.573    | 2.549    |
| 39   | 7.333    | 5.194    | 3.843    | 3.528    | 2.901    | 2.814    | 2.577    | 2.535    | 2.407    | 2.382    |
| 40   | 7.314    | 5.179    | 3.828    | 3.514    | 2.888    | 2.801    | 2.563    | 2.522    | 2.394    | 2.369    |
| 49   | 7.182    | 5.066    | 3.728    | 3.416    | 2.793    | 2.706    | 2.469    | 2.427    | 2.299    | 2.274    |
| 50   | 7.171    | 5.057    | 3.720    | 3.408    | 2.785    | 2.698    | 2.461    | 2.419    | 2.290    | 2.265    |
| 59   | 7.085    | 4.984    | 3.655    | 3.345    | 2.724    | 2.637    | 2.400    | 2.358    | 2.229    | 2.203    |
| 60   | 7.077    | 4.977    | 3.649    | 3.339    | 2.718    | 2.632    | 2.394    | 2.352    | 2.223    | 2.198    |
| 69   | 7.017    | 4.927    | 3.604    | 3.295    | 2.676    | 2.589    | 2.352    | 2.310    | 2.180    | 2.155    |
| 70   | 7.011    | 4.922    | 3.600    | 3.291    | 2.672    | 2.585    | 2.348    | 2.306    | 2.176    | 2.150    |
| 79   | 6.967    | 4.884    | 3.566    | 3.258    | 2.640    | 2.554    | 2.316    | 2.274    | 2.144    | 2.118    |
| 80   | 6.963    | 4.881    | 3.563    | 3.255    | 2.637    | 2.551    | 2.313    | 2.271    | 2.141    | 2.115    |
| 89   | 6.928    | 4.852    | 3.538    | 3.230    | 2.613    | 2.527    | 2.289    | 2.247    | 2.116    | 2.091    |
| 90   | 6.925    | 4.849    | 3.535    | 3.228    | 2.611    | 2.524    | 2.286    | 2.244    | 2.114    | 2.088    |
| 99   | 6.898    | 4.826    | 3.515    | 3.208    | 2.592    | 2.505    | 2.267    | 2.225    | 2.094    | 2.069    |
| 100  | 6.895    | 4.824    | 3.513    | 3.206    | 2.590    | 2.503    | 2.265    | 2.223    | 2.092    | 2.067    |
| 109  | 6.873    | 4.805    | 3.496    | 3.190    | 2.574    | 2.488    | 2.250    | 2.207    | 2.076    | 2.051    |
| 110  | 6.871    | 4.803    | 3.495    | 3.188    | 2.573    | 2.486    | 2.248    | 2.206    | 2.075    | 2.049    |
| 119  | 6.853    | 4.788    | 3.481    | 3.175    | 2.560    | 2.473    | 2.235    | 2.193    | 2.062    | 2.036    |
| 120  | 6.851    | 4.787    | 3.480    | 3.174    | 2.559    | 2.472    | 2.234    | 2.192    | 2.060    | 2.035    |
| 499  | 6.686    | 4.648    | 3.357    | 3.054    | 2.443    | 2.357    | 2.117    | 2.075    | 1.942    | 1.915    |
| 500  | 6.686    | 4.648    | 3.357    | 3.054    | 2.443    | 2.356    | 2.117    | 2.075    | 1.942    | 1.915    |
| 999  | 6.660    | 4.626    | 3.338    | 3.036    | 2.425    | 2.339    | 2.099    | 2.057    | 1.923    | 1.897    |
| 1000 | 6.660    | 4.626    | 3.338    | 3.036    | 2.425    | 2.339    | 2.099    | 2.056    | 1.923    | 1.897    |