Esercizi: ANOVA, regressione e metodi non parametrici

Esercizio 1. È stato fatto un studio con 15 ratti. I 15 ratti sono stati divisi in tre gruppi (da 5 ratti ognuno) e ogni gruppo è ricevuto cibo con una quantità diversa di proteina (bassa, media o alta). Si è misurato il cambio di peso di ogni ratto.

Quantità di proteina

Bassa	Media	Alta
3,89	8,54	20,39
3,87	9,32	24,22
3,26	8,76	30,91
2,70	9,30	22,78
3,82	10,45	26,33

a. Assumendo che i dati della tabella abbiano la distribuzione normale con media μ_1, μ_2, μ_3 e varianza σ^2, dove μ_i è il valore atteso dei dati della colonna i, si acetta l'ipotese nulla che $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ con livello di significatività $0,01$?

Esercizio 2. In Stati Uniti si è fatto un studio sulla quantità di rumore prodotto dalle macchine. Le macchine sono state divise in tre gruppi (grande, medie e piccole), e si è ottenuto i seguenti dati:

Quantità di rumore in base alla dimensione dalla macchina

Piccola	Media	Grande
810	840	785
820	840	790
820	840	785
835	845	760
835	855	760
835	850	770
		795

a. Usando la procedura di ANOVA, con livello di significatività 0.05, si accetterebbe l'ipotese nulla che non cia sia correlazione tra la dimensione della macchina e la quantità di rumore?

Esercizio 3. Sia il modello statistico ANOVA con k gruppi, superparametrizzato, definito come $X_{i,j} = N(\theta + \mu_i, \sigma^2)$ per $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, dove $\theta, \sigma^2, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ sono parametri. Quindi, $X_{i,j}$ è il j-esimo elemento del gruppo i.

a. Dimostrare che questo modello non è identifiabile.

b. Dimostrare che questo modello con la condizione che $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$ è identifiabile.

Esercizio 4. Si è fatto un rapporto sul prezzo di diversi tipi di pesce nel 1970 e 1980.

Tipo del pesce	Prezzo nel 1970	Prezzo nel 1980
1	13,1	27,3
2	15,3	42,4
3	25,8	38,7
4	1,8	4,5
5	4,9	23
6	55,4	166,3
7	39,3	109,7
8	26,7	80,1
9	47,5	150,7
10	6,6	20,3
11	94,7	189,7
12	61,1	131,3
13	135,6	404,2
14	47,6	149

a. Assumendo che il prezzo nel 1980 viene da un modello di regressione lineare semplice, dato il prezzo nel 1970, determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per α, β e σ^2.

b. Se un nuovo tipo di pesce è stato venduto nel 1970 con prezzo $21,4$, determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per il suo prezzo nel 1980?

c. Determinare il intervallo di confidenza al 95% per il prezzo nel 1980 del pesce della domanda precedente.

Esercizio 5. Per controllare se il pulmone di una persona funziona normalmente si misura (in volume) la quantità di aria che lei espira. Questo pottrebe variare con la altezza dalla persona. Un studio con 12 ragazzi tra i 10 e i 15 anni ha misurato $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{12})$ la quantità in litro di aria espirata di ogni ragazzo e la altezza $X = (X_1, X_2, \dots, X_{12})$ in cm di ognuno di loro. Assumiamo una relazione di regressione lineare tra Y e X; cioè, assumiamo che dato X uno abbia $Y_i = N(\alpha + \beta X_i, \sigma^2)$. Si è ottenuto le seguente statistiche:

$$\sum_{i=1}^{12} X_i = 1872, \quad \sum_{i=1}^{12} Y_i = 32,30,$$

$$\sum_{i=1}^{12} X_i^2 = 294320, \quad \sum_{i=1}^{12} Y_i^2 = 93,11, \quad \sum_{i=1}^{12} X_i Y_i = 5156,20.$$

a. Dimostrare che la statistica $T(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n X_i^2, \sum_{i=1}^n Y_i^2, \sum_{i=1}^n X_i Y_i\right)$ è una statistica sufficiente per α, β, σ^2 nel modello di regressione lineare.

b. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per α, β e σ^2.

c. Usando il modello sopra, calcolare lo stimatore di massima verosimiglianza per la quantità di aria espirata da un ragazzo di 160cm? Determinare anche il intervallo di confidenza al 90% per questa quantità.

d. Il test che verifica l'ipotese nulla $H_0\colon \beta = 0$ con livello di significatività 0,05 accetterebe l'ipotese nulla?

Esercizio 6. Sia una tabella di contingenza con ℓ righe e m colonne. Dato un campione $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, dove $X_i \in \{1, 2, \ldots, \ell\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$, definiamo

$$N_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\left(X_k = (i, j)\right),$$

il numero contenuto nella tabella nella i-esima riga e j-esima colonna. Sia $R_i = \sum_{j=1}^{m} N_{i,j}$ e $C_j = \sum_{i=1}^{\ell} N_{i,j}$ la somma della i-esima riga e della j-esima colonna. Ovviamente otteniamo che $N_{i,j}$ è distribuito come la distribuzione multinomiale con parametri $\theta_{i,j}$, per $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dove $\theta_{i,j}$ sono sconosciuti e $\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} \theta_{i,j} = 1$. Definiamo come il *modello con indipendenza tra le righe e le colonne* come il modello con parametri p_i, $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, e q_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dove per ogni i, j, k abbiamo che $\mathbb{P}(X_k = (i, j)) = p_i q_j$. Dimostrare che il test goodness-of-fit che verifica l'ipotese nulla che i X_k vengono dal modello con indipendenza tra le righe e le colonne è uguale al test che abbiamo definito per controllare la indipendenza tra le righe e le colonne di una tabella di contingenza.

Esercizio 7. Un studio statistico ha concluso che il percentuale della popolazione italiana per ogni tipo sanguineo segue la seguente tabella:

Popolazione italiana

	O	A	B	AB
Rh positivo	39%	36%	7,5%	2,5%
Rh negativo	7%	6%	1,5%	0,5%

Usando un modello statistico simili a quello di Hardy-Weinberg, assumiamo che una persona riceve di ognuno dei suoi genitore il gene per il tipo A con probabilità α, il gene per il tipo B con probabilità β e il gene per il tipo O con probabilità $1 - \alpha - \beta$. I parametri α e β sono sconosciuti. Quindi, se X_i è il tipo sanguineo (O, A, B o AB) di una persona scelta a caso, otteniamo che

$$\mathbb{P}(X_i = \mathrm{O}) = (1 - \alpha - \beta)^2, \quad \mathbb{P}(X_i = \mathrm{AB}) = 2\alpha\beta,$$

$$\mathbb{P}(X_i = \mathrm{A}) = \alpha^2 + 2\alpha(1 - \alpha - \beta), \quad \mathbb{P}(X_i = \mathrm{B}) = \beta^2 + 2\beta(1 - \alpha - \beta).$$

Assumiamo un modello simile per il fattore Rh, dove una persona riceve di ognuno dei suoi genitore il gene per il fattore "+" con probabilità ρ e quello per il fattore "-" con probabilità $1 - \rho$. Il parametro ρ è anche sconosciuto. Se Y_i è il fattore Rh di una persona scelta a caso, si ottiene che

$$\mathbb{P}(Y_i = \text{“}+'') = \rho^2 + 2\rho(1 - \rho), \quad \mathbb{P}(Y_i = \text{“}-'') = (1 - \rho)^2.$$

Inoltre, in questo modello si assume che X_i e Y_i siano indipendente tra loro.

a. Assumendo il modello statistico descritto sopra e usando i dati per la popolazione italiana, determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per α, β e ρ.

b. Assumendo che la popolazione italiana totale sia di 500 persone, determinare con livello di significatività asintotico 0,05 se i dati ottenuti per la popolazione italiana seguono il modello statistico descritto sopra.

Esercizio 8. Continuando il esercizio 7, un ospedale ha racolto l'informazione del tipo sanguineo di ogni donatori di sangue, ottenendo i seguenti dati:

Donatori di sangue

	O	A	B	AB
Rh positivo	2291	1631	282	79
Rh negativo	325	332	48	12

a. Determinare con livello di significatività asintotico 0,05 se la distribuzione del tipo sanguineo dei donatori di sangue segue una multinomiale con parametri dati dai percentuali ottenuti per la popolazione italiana (controllare la tabella nel esercizio 7).

b. Determinare con livello di significatività asintotico 0,05 se per il insieme dei donatori di sangue accade che le due caratteristiche, tipo sanguineo (O, A, B o AB) e fattore Rh (positivo o negativo), sono indipendente tra loro.

Esercizio 9. Un studio statistico ha raccolto informazione su 240 persone con base al tipo di olio che loro usano per cuccinare e se hanno avuto problema cardiaco. Si è verificato il seguente:

- 110 persone hanno usato olio di girasole regolarmente,
- 25 persone hanno usato olio di oliva regolarmente e hanno avuto problema cardiaco,
- 78 persone hanno usato olio di girasole regolarmente e non hanno avuto problema cardiaco.

a. Scrivere la tabella di contingenza che contrasta il tipo di olio usato e il fatto di avere avuto o non avere avuto problema cardiaco.

b. Determinare con livello di significatività asintotico 0,05 se il tipo di olio non ha correlazione con il fatto di avere o non avere problema cardiaco.

Tabella con le principali distribuzioni di probabilità

$Y \sim \textbf{Bernoulli}(p), \quad p \in [0,1]$ $f(y) = p^y (1-p)^{1-y}, \qquad y \in \{0,1\}$ $\mathbb{E}(Y) = p, \quad \mathrm{Var}(Y) = p(1-p).$	$Y \sim \textbf{Binomiale}(n,p), \quad p \in [0,1], n \in \{1,2,\ldots\}$ $f(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \qquad y \in \{0,1,2\ldots,n\}$ $\mathbb{E}(Y) = np, \quad \mathrm{Var}(Y) = np(1-p).$
$Y \sim \textbf{Uniforme}(a,b), \quad a,b \in (0,\infty)$ con $a < b$ $f(y) = \frac{1}{b-a}, \qquad y \in [a,b]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}.$	$Y \sim \textbf{Beta}(\alpha,\beta), \quad a,b \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \qquad y \in [0,1]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$
$Y \sim \textbf{Geometrica}(p), \quad p \in [0,1]$ $f(y) = (1-p)^{y-1}p, \qquad y \in \{1,2,\ldots\}$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$	$Y \sim \textbf{Poisson}(\lambda), \quad \lambda \in (0,\infty)$ $f(y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}, \qquad y \in \{0,1,\ldots\}$ $\mathbb{E}(Y) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(Y) = \lambda.$
$Y \sim \textbf{Esponenziale}(\lambda), \quad \lambda \in (0,\infty)$ $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \qquad y \in [0,\infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$	$Y \sim \textbf{Gamma}(\alpha,\beta), \quad a,b \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-\beta y}, \qquad y \in [0,\infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$
$Y \sim \chi^{\mathbf{2}}(k), \quad k \in (0,\infty)$ • $\chi^2(k)$ è equivalente a Gamma $\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$.	$Y \sim N(\mu,\sigma^2), \quad \mu \in (-\infty,\infty), \sigma^2 \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad y \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(Y) = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2.$
$Y \sim F(\alpha,\beta), \quad \alpha,\beta \in (0,\infty)$ • $Y = \frac{W/\alpha}{W'/\beta}$, dove $W \sim \chi^2(\alpha)$, $W' \sim \chi^2(\beta)$ e W è indipendente di W'.	
$Y \sim \textbf{Pareto}(\alpha), \quad \alpha \in (1,\infty)$ $f(y) = (\alpha-1)y^{-\alpha}, \qquad y \in [1,\infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & \text{se } \alpha > 2 \\ \infty, & \text{altrimenti} \end{cases},$ $\mathrm{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}, & \text{se } \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha \in (2,3] \\ \text{non definita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$	$Y \sim t\textbf{-Student}(k), \quad k \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \qquad y \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 1 \\ \text{non definito}, & \text{altrimenti} \end{cases},$ $\mathrm{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{k}{k-2}, & \text{se } k > 2 \\ \infty, & k \in (1,2] \\ \text{non definita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Tabella della $N(0,1)$

Il valore della linea α e collona β è uguale a y se per $Y \sim N(0,1)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha + \beta$.

	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.1	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.2	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabella della t-Student(k)

Il valore della linea k e collona α è uguale a y se per $Y \sim t$-Student(k) si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

Gradi di libertà	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
38	0.851	1.051	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
39	0.851	1.050	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
48	0.849	1.048	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
49	0.849	1.048	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
50	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
58	0.848	1.046	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663
59	0.848	1.046	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662
60	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
78	0.846	1.043	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640
79	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640
80	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
98	0.845	1.042	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627
99	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626
100	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
198	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
199	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
200	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
498	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
499	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
500	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
998	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581
999	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581
1000	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581

Tabella della distribuzione di Fisher con $\alpha = 0.95$

Il valore della linea j e collona i è uguale a y se per $Y \sim F(i,j)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

	1	2	4	5	9	10	14	15	19	20
1	161.448	199.500	224.583	230.162	240.543	241.882	245.364	245.950	247.686	248.013
2	18.513	19.000	19.247	19.296	19.385	19.396	19.424	19.429	19.443	19.446
3	10.128	9.552	9.117	9.013	8.812	8.786	8.715	8.703	8.667	8.660
4	7.709	6.944	6.388	6.256	5.999	5.964	5.873	5.858	5.811	5.803
5	6.608	5.786	5.192	5.050	4.772	4.735	4.636	4.619	4.568	4.558
6	5.987	5.143	4.534	4.387	4.099	4.060	3.956	3.938	3.884	3.874
7	5.591	4.737	4.120	3.972	3.677	3.637	3.529	3.511	3.455	3.445
8	5.318	4.459	3.838	3.687	3.388	3.347	3.237	3.218	3.161	3.150
9	5.117	4.256	3.633	3.482	3.179	3.137	3.025	3.006	2.948	2.936
10	4.965	4.103	3.478	3.326	3.020	2.978	2.865	2.845	2.785	2.774
11	4.844	3.982	3.357	3.204	2.896	2.854	2.739	2.719	2.658	2.646
12	4.747	3.885	3.259	3.106	2.796	2.753	2.637	2.617	2.555	2.544
13	4.667	3.806	3.179	3.025	2.714	2.671	2.554	2.533	2.471	2.459
14	4.600	3.739	3.112	2.958	2.646	2.602	2.484	2.463	2.400	2.388
15	4.543	3.682	3.056	2.901	2.588	2.544	2.424	2.403	2.340	2.328
16	4.494	3.634	3.007	2.852	2.538	2.494	2.373	2.352	2.288	2.276
17	4.451	3.592	2.965	2.810	2.494	2.450	2.329	2.308	2.243	2.230
18	4.414	3.555	2.928	2.773	2.456	2.412	2.290	2.269	2.203	2.191
19	4.381	3.522	2.895	2.740	2.423	2.378	2.256	2.234	2.168	2.155
20	4.351	3.493	2.866	2.711	2.393	2.348	2.225	2.203	2.137	2.124
29	4.183	3.328	2.701	2.545	2.223	2.177	2.050	2.027	1.958	1.945
30	4.171	3.316	2.690	2.534	2.211	2.165	2.037	2.015	1.945	1.932
39	4.091	3.238	2.612	2.456	2.131	2.084	1.954	1.931	1.860	1.846
40	4.085	3.232	2.606	2.449	2.124	2.077	1.948	1.924	1.853	1.839
49	4.038	3.187	2.561	2.404	2.077	2.030	1.899	1.876	1.803	1.789
50	4.034	3.183	2.557	2.400	2.073	2.026	1.895	1.871	1.798	1.784
59	4.004	3.153	2.528	2.371	2.043	1.995	1.863	1.839	1.766	1.751
60	4.001	3.150	2.525	2.368	2.040	1.993	1.860	1.836	1.763	1.748
69	3.980	3.130	2.505	2.348	2.019	1.971	1.838	1.814	1.739	1.725
70	3.978	3.128	2.503	2.346	2.017	1.969	1.836	1.812	1.737	1.722
79	3.962	3.112	2.487	2.330	2.001	1.953	1.819	1.795	1.720	1.705
80	3.960	3.111	2.486	2.329	1.999	1.951	1.817	1.793	1.718	1.703
89	3.948	3.099	2.474	2.317	1.987	1.939	1.804	1.780	1.705	1.690
90	3.947	3.098	2.473	2.316	1.986	1.938	1.803	1.779	1.703	1.688
99	3.937	3.088	2.464	2.306	1.976	1.928	1.793	1.769	1.693	1.678
100	3.936	3.087	2.463	2.305	1.975	1.927	1.792	1.768	1.691	1.676
109	3.928	3.080	2.455	2.298	1.967	1.919	1.784	1.759	1.683	1.668
110	3.927	3.079	2.454	2.297	1.966	1.918	1.783	1.758	1.682	1.667
119	3.921	3.072	2.448	2.290	1.959	1.911	1.776	1.751	1.675	1.659
120	3.920	3.072	2.447	2.290	1.959	1.910	1.775	1.750	1.674	1.659
499	3.860	3.014	2.390	2.232	1.899	1.850	1.712	1.686	1.607	1.592
500	3.860	3.014	2.390	2.232	1.899	1.850	1.712	1.686	1.607	1.592
999	3.851	3.005	2.381	2.223	1.889	1.840	1.702	1.676	1.597	1.581
1000	3.851	3.005	2.381	2.223	1.889	1.840	1.702	1.676	1.597	1.581

Tabella della distribuzione di Fisher con $\alpha = 0.99$

Il valore della linea j e collona i è uguale a y se per $Y \sim F(i,j)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

	1	2	4	5	9	10	14	15	19	20
1	4052.181	4999.500	5624.583	5763.650	6022.473	6055.847	6142.674	6157.285	6200.576	6208.730
2	98.503	99.000	99.249	99.299	99.388	99.399	99.428	99.433	99.447	99.449
3	34.116	30.817	28.710	28.237	27.345	27.229	26.924	26.872	26.719	26.690
4	21.198	18.000	15.977	15.522	14.659	14.546	14.249	14.198	14.048	14.020
5	16.258	13.274	11.392	10.967	10.158	10.051	9.770	9.722	9.580	9.553
6	13.745	10.925	9.148	8.746	7.976	7.874	7.605	7.559	7.422	7.396
7	12.246	9.547	7.847	7.460	6.719	6.620	6.359	6.314	6.181	6.155
8	11.259	8.649	7.006	6.632	5.911	5.814	5.559	5.515	5.384	5.359
9	10.561	8.022	6.422	6.057	5.351	5.257	5.005	4.962	4.833	4.808
10	10.044	7.559	5.994	5.636	4.942	4.849	4.601	4.558	4.430	4.405
11	9.646	7.206	5.668	5.316	4.632	4.539	4.293	4.251	4.123	4.099
12	9.330	6.927	5.412	5.064	4.388	4.296	4.052	4.010	3.883	3.858
13	9.074	6.701	5.205	4.862	4.191	4.100	3.857	3.815	3.689	3.665
14	8.862	6.515	5.035	4.695	4.030	3.939	3.698	3.656	3.529	3.505
15	8.683	6.359	4.893	4.556	3.895	3.805	3.564	3.522	3.396	3.372
16	8.531	6.226	4.773	4.437	3.780	3.691	3.451	3.409	3.283	3.259
17	8.400	6.112	4.669	4.336	3.682	3.593	3.353	3.312	3.186	3.162
18	8.285	6.013	4.579	4.248	3.597	3.508	3.269	3.227	3.101	3.077
19	8.185	5.926	4.500	4.171	3.523	3.434	3.195	3.153	3.027	3.003
20	8.096	5.849	4.431	4.103	3.457	3.368	3.130	3.088	2.962	2.938
29	7.598	5.420	4.045	3.725	3.092	3.005	2.767	2.726	2.599	2.574
30	7.562	5.390	4.018	3.699	3.067	2.979	2.742	2.700	2.573	2.549
39	7.333	5.194	3.843	3.528	2.901	2.814	2.577	2.535	2.407	2.382
40	7.314	5.179	3.828	3.514	2.888	2.801	2.563	2.522	2.394	2.369
49	7.182	5.066	3.728	3.416	2.793	2.706	2.469	2.427	2.299	2.274
50	7.171	5.057	3.720	3.408	2.785	2.698	2.461	2.419	2.290	2.265
59	7.085	4.984	3.655	3.345	2.724	2.637	2.400	2.358	2.229	2.203
60	7.077	4.977	3.649	3.339	2.718	2.632	2.394	2.352	2.223	2.198
69	7.017	4.927	3.604	3.295	2.676	2.589	2.352	2.310	2.180	2.155
70	7.011	4.922	3.600	3.291	2.672	2.585	2.348	2.306	2.176	2.150
79	6.967	4.884	3.566	3.258	2.640	2.554	2.316	2.274	2.144	2.118
80	6.963	4.881	3.563	3.255	2.637	2.551	2.313	2.271	2.141	2.115
89	6.928	4.852	3.538	3.230	2.613	2.527	2.289	2.247	2.116	2.091
90	6.925	4.849	3.535	3.228	2.611	2.524	2.286	2.244	2.114	2.088
99	6.898	4.826	3.515	3.208	2.592	2.505	2.267	2.225	2.094	2.069
100	6.895	4.824	3.513	3.206	2.590	2.503	2.265	2.223	2.092	2.067
109	6.873	4.805	3.496	3.190	2.574	2.488	2.250	2.207	2.076	2.051
110	6.871	4.803	3.495	3.188	2.573	2.486	2.248	2.206	2.075	2.049
119	6.853	4.788	3.481	3.175	2.560	2.473	2.235	2.193	2.062	2.036
120	6.851	4.787	3.480	3.174	2.559	2.472	2.234	2.192	2.060	2.035
499	6.686	4.648	3.357	3.054	2.443	2.357	2.117	2.075	1.942	1.915
500	6.686	4.648	3.357	3.054	2.443	2.356	2.117	2.075	1.942	1.915
999	6.660	4.626	3.338	3.036	2.425	2.339	2.099	2.057	1.923	1.897
1000	6.660	4.626	3.338	3.036	2.425	2.339	2.099	2.056	1.923	1.897