Esercizi: Intervallo di confidenza e verifica d'ipotese

Esercizio 1. Sia $3.1, 3.5, 2.5, 3.4, 4.6, 2.3, 2.7, 2.2, 2.9, 2.8$ un campione casuale da una distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$ con μ e σ^2 incogniti.

a. Trovare il minore intervallo di confidenza per μ al 80%.

b. Trovare il minore intervallo di confidenza per μ al 90%.

c. Trovare il minore intervallo di confidenza per μ al 99%.

d. Trovare i valori c_1, c_2 tale che $[c_1, c_2]$ sia un intervallo di confidenza per σ^2 al 90% con $[c_1, \infty)$ e $[0, c_2]$ intervalli di confidenza al 95% per σ^2.

e. Trovare i valori c_1, c_2 tale che $[c_1, c_2]$ sia un intervallo di confidenza per σ^2 al 98% con $[c_1, \infty)$ e $[0, c_2]$ intervalli di confidenza al 99% per σ^2.

Esercizio 2. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale dalla distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 noto. Sia L la lunghezza del minore intervallo di confidenza per μ a livello γ. Sia $\Phi(z)$ la funzione cummulativa della $N(0,1)$; cioè, $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$ per $Z \sim N(0,1)$.

a. Dimostrare che $\mathbb{E}_\mu(L^2) = \frac{4c^2\sigma^2}{n}$, dove $c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1-\gamma}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$.

b. Trovare il minore valore di n tale che il intervallo di confidenza più piccolo a livello 95% abbia lunghezza minore di $\sigma/100$.

c. Dimostrare che, se σ^2 è anche incognito, otteniamo che $\mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}(L^2) = \frac{4a^2\sigma^2}{n}$, dove $a = \Phi_{n-1}^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$ e $\Phi_n(z)$ è la funzione cummulativa della t-Student(n).

Esercizio 3. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale dalla distribuzione Uniforme$(-\theta, \theta)$. Sia la statistica $T(X) = \max\{X^{(1)}, -X^{(n)}\}$.

a. Calcolare la funzione cummulativa della variabile aleatoria $T(X)$.

b. Dimostrare che $T(X)$ è lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.

c. Dimostrare che $\frac{T(X)}{\theta}$ è una quantità pivotale per θ.

d. Dimostrare che $[T(X), (1-\gamma)^{-1/n}T(X)]$ è un intervallo di confidenza per θ a livello γ.

Esercizio 4. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale dalla distribuzione Esponenziale(θ). Sappiamo che lo stimatore di massima verosimiglianza per θ è $\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}}(X) = 1/\bar{X}$.

a. A quale distribuzione la variabile aleatoria $\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}}(X)$ converge?
Suggerimento: considerare una variabile aleatoria (che sia una statistica dei dati) per cui la convergenza sia conosciuta e applicare il metodo delta per trasformare questa variabile in $\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}}(X)$.

b. Trovare un intervallo di confidenza approsimativo (asintotico) per θ a livello 90%.

Esercizio 5. Un ingegnere civile vuole misurare la resistenza di due tipi di cemento, perciò analizza due campioni indipendenti, ottenendo i seguenti dati:

- Campione 1: $3254, 3267, 4302, 3184, 3266, 3297, 3329, 3507, 3058, 3116$;
- Campione 2: $3094, 3106, 3004, 3066, 2983, 3124, 3314, 3211, 3380, 3018$.

Assumiamo che i campioni siano ottenuti da distribuzioni normali con varianza identica σ^2 e medie μ_1 per il campione 1 e μ_2 per il campione 2.

a. Assumendo che $\sigma^2 = 50000$ trovare un intervallo di confidenza al livello 95% per la differenza delle media $\mu_1 - \mu_2$.

b. Note che il intervallo ottenuto nella domanda (a), assumendo σ^2 noto, cresce con σ^2. Se adesso assumiamo σ^2 incognito, lo stimatore di verosimiglianza per σ^2 è piu grandi di 50 000?

c. Trovare un intervallo di confidenza al livello 95% per la differenza delle media $\mu_1 - \mu_2$ assumendo σ^2 incognito.

Esercizio 6. Supponiamo che sia stato fatto un sondaggio per una elezione e che il sondaggio è risultato nel campione $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dove $X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$. Per ogni i, $X_i = 1$ rappresenta che la i-esima persona del sondaggio ha detto che voterà nel candidato A, mentre $X_i = 0$ rappresenta un voto al candidato B. Vogliamo calcolare un intervallo di confidenza asintotico per θ e ottenere informazione sulla possibilità che il candidato A vinca l'elezione.

a. Abbiamo visto che lo stimatore di massima verosimiglianza per θ è $\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \bar{X}$. Determinare la varianza di $\widehat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$.

b. Dimostrare che $\bar{X}(1-\bar{X})$ è un stimatore convergente per $\theta(1-\theta)$.

c. Nel limite quando $n \to \infty$, la variabile $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}$ converge in distribuzione a una variabile aleatoria Z. Determinare la distribuzione di Z.

d. Costruire il intervallo di confidenza asintotico piu piccolo per θ al livello 99%. Poi, supponendo che $\bar{X} = 0.51$ e $n = 1000$, si può dire che con probabilità almeno 99% (usando il intervallo di confidenza asintotico) il sondaggio afferma che candidato A dovrebbe vincere l'elezione? E se $\bar{X} = 0.002$ e $n = 1000$, cioè solo due persone hanno scelto il candidato A, quale intervallo di confidenza asintotico per θ al livello 99% otteniamo?

e. Sia $g(y) = \log\left(\frac{y}{1-y}\right)$ per $y \in [0,1]$. La variabile aleatoria $\sqrt{n}(g(\bar{X}) - g(\theta))$ converge a una variabile aleatoria Z'. Determinare la distribuzione di Z'.
Osservazione: la distribuzione di Z' può dipendere da θ.

f. Trovare il intervallo di confidenza asintotico più piccolo per $g(\theta)$ al livello 99%, supponendo $\bar{X} = 0.51$ e $n = 1000$. Come questo intervallo si paragona con quello derivato nella domanda (d)? E se $\bar{X} = 0.002$ (con $n = 1000$ come prima), quale intervallo di confidenza asintotico per $g(\theta)$ al livello 99% otteniamo?

g. Usare il intervallo di confidenza ottenuto nella domanda (d) per costruire un test di verifica del'ipotese $H_0 : \theta \geq 1/2$ con livello di significatività 0.01.

Esercizio 7. In un procedimento chimico serve che il pH di uno dei reagenti sia esattamente uguale a 8.20. Questo è rilevato con un metodo che fornisce una distribuzione normale di media uguale al valore vero del pH e varianza (nota) $\sigma^2 = 0.0025$.

a. Costruire un test d'ipotesi tale che se il pH è veramente 8.20, il test lo afferma con probabilità almeno 95%.

b. Se la media campionaria calcolata con un campione di taglia $n = 9$ è $\bar{x} = 8.21$, cosa si può inferire dal test d'ipotesi? Il test accetta l'ipotese che $\mu = 8.20$?

Esercizio 8. Una scatola contiene migliaia di monete di tre colori diversi: rosso, marrone e gialla. Si vuole controllare l'ipotese nulla H_0 che i tre colori siano presenti con la stessa proporzione nella scatola. Supponiamo che un test è fatto scegliendo 3 monete a caso dalla scatola (con ripetizione) e decidendo di rifiutare H_0 se e solo se almeno due monete hanno lo stesso colore.

a. Qual è il livello di significatività del test?

b. Qual è la probabilità di un errore di tipo II se la proporzione dei colore nella scatola corrisponde a 1/7 di monete rosse, 2/7 di monete marrone e 4/7 di monete gialle.

Esercizio 9. Supponiamo che abbiamo un campione casuale di taglia $n = 16$ da una distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$, dove μ e σ^2 sono incogniti.

a. Descrivere il test con livello di significatività 0.005 che verifica l'ipotese nulla $H_0 : \mu \geq 3$ contro l'ipotese alternativa $H_1 : \mu < 3$.

b. Calcolare il rapporto di verosimiglianza per l'ipotese nulla $H_0 = |\mu| \geq 3$ contro $H_1 = |\mu| < 3$.

Esercizio 10. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale dalla $N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma^2 = 1$. Vogliamo verificare l'ipotese nulla $H_0\colon \mu \leq 0$ contro $H_1\colon \mu > 0$. Supponiamo che abbiamo deciso di usare il test UMP (uniformemente più potente) che rifiuta H_0 con probabilità 0.95 quando $\mu = 1$.

a. Determinare il livello di significatività del test per $n = 16$.

Tabella con le principali distribuzioni di probabilità

$Y \sim \textbf{Bernoulli}(p), \quad p \in [0,1]$ $f(y) = p^y(1-p)^{1-y}, \qquad y \in \{0,1\}$ $\mathbb{E}(Y) = p, \quad \mathrm{Var}(Y) = p(1-p).$	$Y \sim \textbf{Binomiale}(n,p), \quad p \in [0,1], n \in \{1,2,\dots\}$ $f(y) = \binom{n}{y} p^y(1-p)^{n-y}, \qquad y \in \{0,1,2\dots,n\}$ $\mathbb{E}(Y) = np, \quad \mathrm{Var}(Y) = np(1-p).$
$Y \sim \textbf{Uniforme}(a,b), \quad a,b \in (0,\infty)$ con $a < b$ $f(y) = \frac{1}{b-a}, \qquad y \in [a,b]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}.$	$Y \sim \textbf{Beta}(\alpha,\beta), \quad a,b \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \qquad y \in [0,1]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$
$Y \sim \textbf{Geometrica}(p), \quad p \in [0,1]$ $f(y) = (1-p)^{y-1}p, \qquad y \in \{1,2,\dots\}$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$	$Y \sim \textbf{Poisson}(\lambda), \quad \lambda \in (0,\infty)$ $f(y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}, \qquad y \in \{0,1,\dots\}$ $\mathbb{E}(Y) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(Y) = \lambda.$
$Y \sim \textbf{Esponenziale}(\lambda), \quad \lambda \in (0,\infty)$ $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \qquad y \in [0,\infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$	$Y \sim \textbf{Gamma}(\alpha,\beta), \quad a,b \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-\beta y}, \qquad y \in [0,\infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$
$Y \sim \chi^2(k), \quad k \in (0,\infty)$ • $\chi^2(k)$ è equivalente a Gamma $\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$.	$Y \sim N(\mu,\sigma^2), \quad \mu \in (-\infty,\infty), \sigma^2 \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad y \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(Y) = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2.$
$Y \sim \textbf{Pareto}(\alpha), \quad \alpha \in (1,\infty)$ $f(y) = (\alpha-1)y^{-\alpha}, \qquad y \in [1,\infty)$ $\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & \text{se } \alpha > 2 \\ \infty, & \text{altrimenti} \end{cases},$ $\mathrm{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}, & \text{se } \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha \in (2,3] \\ \text{non definita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$	$Y \sim t\textbf{-Student}(k), \quad k \in (0,\infty)$ $f(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \qquad y \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} 0, & \text{se } k > 1 \\ \text{non definito}, & \text{altrimenti} \end{cases},$ $\mathrm{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{k}{k-2}, & \text{se } k > 2 \\ \infty, & k \in (1,2] \\ \text{non definita}, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Tabella della $N(0,1)$

Il valore della linea α e collona β è uguale a y se per $Y \sim N(0,1)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha + \beta$.

	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.1	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.2	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabella della t-Student(k)

Il valore della linea k e collona α è uguale a y se per $Y \sim t$-Student(k) si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

Gradi di libertà	80%	85%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
28	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
38	0.851	1.051	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712
39	0.851	1.050	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708
40	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
48	0.849	1.048	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
49	0.849	1.048	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
50	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
58	0.848	1.046	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663
59	0.848	1.046	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662
60	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
78	0.846	1.043	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640
79	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640
80	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
98	0.845	1.042	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627
99	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626
100	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
198	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
199	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
200	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
498	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
499	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
500	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
998	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581
999	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581
1000	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581

Tabella della $\chi^2(k)$

Il valore della linea k e collona α è uguale a y se per $Y \sim \chi^2(k)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

Gradi di libertà	1%	5%	10%	80%	90%	95%	99%
1	0.000	0.004	0.016	1.642	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	3.219	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	4.642	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	5.989	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	7.289	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	8.558	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	9.803	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	11.030	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	12.242	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	13.442	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	14.631	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	6.304	15.812	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	16.985	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	7.790	18.151	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	19.311	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	20.465	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	21.615	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	22.760	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	23.900	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	25.038	28.412	31.410	37.566
28	13.565	16.928	18.939	34.027	37.916	41.337	48.278
29	14.256	17.708	19.768	35.139	39.087	42.557	49.588
30	14.953	18.493	20.599	36.250	40.256	43.773	50.892
38	20.691	24.884	27.343	45.076	49.513	53.384	61.162
39	21.426	25.695	28.196	46.173	50.660	54.572	62.428
40	22.164	26.509	29.051	47.269	51.805	55.758	63.691
48	28.177	33.098	35.949	55.993	60.907	65.171	73.683
49	28.941	33.930	36.818	57.079	62.038	66.339	74.919
50	29.707	34.764	37.689	58.164	63.167	67.505	76.154
58	35.913	41.492	44.696	66.816	72.160	76.778	85.950
59	36.698	42.339	45.577	67.894	73.279	77.931	87.166
60	37.485	43.188	46.459	68.972	74.397	79.082	88.379
78	51.910	58.654	62.483	88.271	94.374	99.617	109.958
79	52.725	59.522	63.380	89.338	95.476	100.749	111.144
80	53.540	60.391	64.278	90.405	96.578	101.879	112.329
98	68.396	76.164	80.541	109.547	116.315	122.108	133.476
99	69.230	77.046	81.449	110.607	117.407	123.225	134.642
100	70.065	77.929	82.358	111.667	118.498	124.342	135.807
198	154.665	166.444	172.964	214.524	223.892	231.829	247.212
199	155.548	167.361	173.900	215.567	224.957	232.912	248.329
200	156.432	168.279	174.835	216.609	226.021	233.994	249.445
498	427.535	447.251	458.007	524.348	538.849	551.023	574.346
499	428.461	448.199	458.967	525.375	539.890	552.075	575.419
500	429.388	449.147	459.926	526.401	540.930	553.127	576.493
998	897.017	925.668	941.190	1035.393	1055.667	1072.606	1104.865
999	897.964	926.631	942.161	1036.412	1056.695	1073.643	1105.917
1000	898.912	927.594	943.133	1037.431	1057.724	1074.679	1106.969

Tabella della distribuzione di Fisher con $\alpha = 0.95$

Il valore della linea j e collona i è uguale a y se per $Y \sim F(i,j)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

	1	2	4	5	9	10	14	15	19	20
1	161.448	199.500	224.583	230.162	240.543	241.882	245.364	245.950	247.686	248.013
2	18.513	19.000	19.247	19.296	19.385	19.396	19.424	19.429	19.443	19.446
3	10.128	9.552	9.117	9.013	8.812	8.786	8.715	8.703	8.667	8.660
4	7.709	6.944	6.388	6.256	5.999	5.964	5.873	5.858	5.811	5.803
5	6.608	5.786	5.192	5.050	4.772	4.735	4.636	4.619	4.568	4.558
6	5.987	5.143	4.534	4.387	4.099	4.060	3.956	3.938	3.884	3.874
7	5.591	4.737	4.120	3.972	3.677	3.637	3.529	3.511	3.455	3.445
8	5.318	4.459	3.838	3.687	3.388	3.347	3.237	3.218	3.161	3.150
9	5.117	4.256	3.633	3.482	3.179	3.137	3.025	3.006	2.948	2.936
10	4.965	4.103	3.478	3.326	3.020	2.978	2.865	2.845	2.785	2.774
11	4.844	3.982	3.357	3.204	2.896	2.854	2.739	2.719	2.658	2.646
12	4.747	3.885	3.259	3.106	2.796	2.753	2.637	2.617	2.555	2.544
13	4.667	3.806	3.179	3.025	2.714	2.671	2.554	2.533	2.471	2.459
14	4.600	3.739	3.112	2.958	2.646	2.602	2.484	2.463	2.400	2.388
15	4.543	3.682	3.056	2.901	2.588	2.544	2.424	2.403	2.340	2.328
16	4.494	3.634	3.007	2.852	2.538	2.494	2.373	2.352	2.288	2.276
17	4.451	3.592	2.965	2.810	2.494	2.450	2.329	2.308	2.243	2.230
18	4.414	3.555	2.928	2.773	2.456	2.412	2.290	2.269	2.203	2.191
19	4.381	3.522	2.895	2.740	2.423	2.378	2.256	2.234	2.168	2.155
20	4.351	3.493	2.866	2.711	2.393	2.348	2.225	2.203	2.137	2.124
29	4.183	3.328	2.701	2.545	2.223	2.177	2.050	2.027	1.958	1.945
30	4.171	3.316	2.690	2.534	2.211	2.165	2.037	2.015	1.945	1.932
39	4.091	3.238	2.612	2.456	2.131	2.084	1.954	1.931	1.860	1.846
40	4.085	3.232	2.606	2.449	2.124	2.077	1.948	1.924	1.853	1.839
49	4.038	3.187	2.561	2.404	2.077	2.030	1.899	1.876	1.803	1.789
50	4.034	3.183	2.557	2.400	2.073	2.026	1.895	1.871	1.798	1.784
59	4.004	3.153	2.528	2.371	2.043	1.995	1.863	1.839	1.766	1.751
60	4.001	3.150	2.525	2.368	2.040	1.993	1.860	1.836	1.763	1.748
69	3.980	3.130	2.505	2.348	2.019	1.971	1.838	1.814	1.739	1.725
70	3.978	3.128	2.503	2.346	2.017	1.969	1.836	1.812	1.737	1.722
79	3.962	3.112	2.487	2.330	2.001	1.953	1.819	1.795	1.720	1.705
80	3.960	3.111	2.486	2.329	1.999	1.951	1.817	1.793	1.718	1.703
89	3.948	3.099	2.474	2.317	1.987	1.939	1.804	1.780	1.705	1.690
90	3.947	3.098	2.473	2.316	1.986	1.938	1.803	1.779	1.703	1.688
99	3.937	3.088	2.464	2.306	1.976	1.928	1.793	1.769	1.693	1.678
100	3.936	3.087	2.463	2.305	1.975	1.927	1.792	1.768	1.691	1.676
109	3.928	3.080	2.455	2.298	1.967	1.919	1.784	1.759	1.683	1.668
110	3.927	3.079	2.454	2.297	1.966	1.918	1.783	1.758	1.682	1.667
119	3.921	3.072	2.448	2.290	1.959	1.911	1.776	1.751	1.675	1.659
120	3.920	3.072	2.447	2.290	1.959	1.910	1.775	1.750	1.674	1.659
499	3.860	3.014	2.390	2.232	1.899	1.850	1.712	1.686	1.607	1.592
500	3.860	3.014	2.390	2.232	1.899	1.850	1.712	1.686	1.607	1.592
999	3.851	3.005	2.381	2.223	1.889	1.840	1.702	1.676	1.597	1.581
1000	3.851	3.005	2.381	2.223	1.889	1.840	1.702	1.676	1.597	1.581

Tabella della distribuzione di Fisher con $\alpha = 0.99$

Il valore della linea j e collona i è uguale a y se per $Y \sim F(i,j)$ si ottiene $\mathbb{P}(Y \leq y) = \alpha$.

	1	2	4	5	9	10	14	15	19	20
1	4052.181	4999.500	5624.583	5763.650	6022.473	6055.847	6142.674	6157.285	6200.576	6208.730
2	98.503	99.000	99.249	99.299	99.388	99.399	99.428	99.433	99.447	99.449
3	34.116	30.817	28.710	28.237	27.345	27.229	26.924	26.872	26.719	26.690
4	21.198	18.000	15.977	15.522	14.659	14.546	14.249	14.198	14.048	14.020
5	16.258	13.274	11.392	10.967	10.158	10.051	9.770	9.722	9.580	9.553
6	13.745	10.925	9.148	8.746	7.976	7.874	7.605	7.559	7.422	7.396
7	12.246	9.547	7.847	7.460	6.719	6.620	6.359	6.314	6.181	6.155
8	11.259	8.649	7.006	6.632	5.911	5.814	5.559	5.515	5.384	5.359
9	10.561	8.022	6.422	6.057	5.351	5.257	5.005	4.962	4.833	4.808
10	10.044	7.559	5.994	5.636	4.942	4.849	4.601	4.558	4.430	4.405
11	9.646	7.206	5.668	5.316	4.632	4.539	4.293	4.251	4.123	4.099
12	9.330	6.927	5.412	5.064	4.388	4.296	4.052	4.010	3.883	3.858
13	9.074	6.701	5.205	4.862	4.191	4.100	3.857	3.815	3.689	3.665
14	8.862	6.515	5.035	4.695	4.030	3.939	3.698	3.656	3.529	3.505
15	8.683	6.359	4.893	4.556	3.895	3.805	3.564	3.522	3.396	3.372
16	8.531	6.226	4.773	4.437	3.780	3.691	3.451	3.409	3.283	3.259
17	8.400	6.112	4.669	4.336	3.682	3.593	3.353	3.312	3.186	3.162
18	8.285	6.013	4.579	4.248	3.597	3.508	3.269	3.227	3.101	3.077
19	8.185	5.926	4.500	4.171	3.523	3.434	3.195	3.153	3.027	3.003
20	8.096	5.849	4.431	4.103	3.457	3.368	3.130	3.088	2.962	2.938
29	7.598	5.420	4.045	3.725	3.092	3.005	2.767	2.726	2.599	2.574
30	7.562	5.390	4.018	3.699	3.067	2.979	2.742	2.700	2.573	2.549
39	7.333	5.194	3.843	3.528	2.901	2.814	2.577	2.535	2.407	2.382
40	7.314	5.179	3.828	3.514	2.888	2.801	2.563	2.522	2.394	2.369
49	7.182	5.066	3.728	3.416	2.793	2.706	2.469	2.427	2.299	2.274
50	7.171	5.057	3.720	3.408	2.785	2.698	2.461	2.419	2.290	2.265
59	7.085	4.984	3.655	3.345	2.724	2.637	2.400	2.358	2.229	2.203
60	7.077	4.977	3.649	3.339	2.718	2.632	2.394	2.352	2.223	2.198
69	7.017	4.927	3.604	3.295	2.676	2.589	2.352	2.310	2.180	2.155
70	7.011	4.922	3.600	3.291	2.672	2.585	2.348	2.306	2.176	2.150
79	6.967	4.884	3.566	3.258	2.640	2.554	2.316	2.274	2.144	2.118
80	6.963	4.881	3.563	3.255	2.637	2.551	2.313	2.271	2.141	2.115
89	6.928	4.852	3.538	3.230	2.613	2.527	2.289	2.247	2.116	2.091
90	6.925	4.849	3.535	3.228	2.611	2.524	2.286	2.244	2.114	2.088
99	6.898	4.826	3.515	3.208	2.592	2.505	2.267	2.225	2.094	2.069
100	6.895	4.824	3.513	3.206	2.590	2.503	2.265	2.223	2.092	2.067
109	6.873	4.805	3.496	3.190	2.574	2.488	2.250	2.207	2.076	2.051
110	6.871	4.803	3.495	3.188	2.573	2.486	2.248	2.206	2.075	2.049
119	6.853	4.788	3.481	3.175	2.560	2.473	2.235	2.193	2.062	2.036
120	6.851	4.787	3.480	3.174	2.559	2.472	2.234	2.192	2.060	2.035
499	6.686	4.648	3.357	3.054	2.443	2.357	2.117	2.075	1.942	1.915
500	6.686	4.648	3.357	3.054	2.443	2.356	2.117	2.075	1.942	1.915
999	6.660	4.626	3.338	3.036	2.425	2.339	2.099	2.057	1.923	1.897
1000	6.660	4.626	3.338	3.036	2.425	2.339	2.099	2.056	1.923	1.897