# Lista di esercizi I

**Esercizio 1.** Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale nel spazio $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ con funzione di densità

$$f(-1) = f(1) = \theta/2, \quad f(0) = \frac{1-\theta}{2},$$

e spazio del parametro $\Theta = [0, 1]$.

a. Scrivere la funzione di densità del vettore $X$.

b. Indicare una statistica sufficiente unidimensionale per $\theta$.

c. Indicare una statistica completa.

d. Trovare il stimatore dei momenti.

e. Trovare il stimatore di massima verosimiglianza e verificare se è il stimatore UMVUE.

**Esercizio 2.** Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale con parametri $\theta, \alpha$, dove ogni $X_i$ ha funzione di densità

$$f(y \mid \theta, \alpha) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1}, \quad y \in [0, \theta],\ \theta > 0,\ \alpha > 0.$$

a. Indicare se la statistica $T(X) = \sum_{i=1}^n \log(X_i)$ è una statistica sufficiente per $\alpha$.

b. Indicare una statistica sufficiente minimale per $(\alpha, \theta)$.

c. Sia la statistica $\gamma(X) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2/n}{\left(\sum_{i=1}^n X_i/n\right)^2}$. Dimostrare che $\gamma(X) \geq 1$ con probabilità 1. (Infatti, questo è vero per qualsiasi distribuzione dei $X_i$.)

d. Dimostrare che il stimatore dei momenti di $\alpha$ è $\sqrt{\frac{\gamma(X)}{\gamma(X)-1}} - 1$, e che il stimatore dei momenti di $\theta$ è $\bar{X}\frac{\sqrt{\gamma(X)}}{\sqrt{\gamma(X)}-\sqrt{\gamma(X)-1}}$.

e. Calcolare il stimatore di massima verosimiglianza per $\alpha$ e $\theta$.

**Esercizio 3.** Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale nel spazio $\Omega = (0, \infty)$ con funzione di densità

$$f(y) = \frac{(y+1)}{\theta(1+\theta)} \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right),$$

e spazio del parametro $\Theta = (0, \infty)$.

a. Dimostrare che $f$ è una funzione di densità, e calcolare il suo valore atesso.

b. La statistica bidimensionale $T(X) = (\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i)$ è una statistica sufficiente per $\theta$? È minimale?

**Esercizio 4.** Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione casuale della distribuzione Gamma$(\alpha, \beta)$ con $\alpha$ noto.

a. Calcolare la funzione di verosimiglianza per il parametro $\beta$.

b. Calcolare il stimatore di massima verosimiglianza $\widehat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$ per $\beta$. Il stimatore è non distorto? (Suggerimento: se $Y \sim$ Gamma$(\alpha, \beta)$ e $Z \sim$ Gamma$(\alpha', \beta)$, allora $Y + Z \sim$ Gamma$(\alpha + \alpha', \beta)$.)

c. Calcolare l'informazione di Fisher della distribuzione Gamma$(\alpha, \beta)$ per il parametro $\beta$.

d. Il stimatore $\widehat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$ è efficiente?

e. La statistica $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ è una statistica completa per $\beta$?

f. Calcolare lo stimatore UMVUE. Il stimatore UMVUE è efficiente?

**Esercizio 5.** . Un strumento è usato per misurare il voltaggio di un sistema elettrico. Assumiamo che, ad ogni momento, il voltaggio del sistema sia una variabile aleatoria indipendente distribuita come una normale con media $\mu > 0$ e varianza $\sigma^2 > 0$, dove sia $\mu$ che $\sigma^2$ sono incogniti. Inoltre si sa che il strumento ha un problema e sempre mostra un valore che è $\tau$ unità piu grande del valore reale del sistema, dove $\tau > 0$ è anche incognito. Sia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un campione ottenuto di $n$ misurazioni indipendente usando questo strumento (con parametri incogniti $\mu, \sigma^2, \tau$).

a. Scrivere la funzione di densità $f_n$ del vettore $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

b. Usando la densità $f_n$ ottenuta nella domanda precedente, il modello statistico

$$\{f_n(\cdot \mid \mu, \sigma^2, \tau) \colon \mu, \sigma^2, \tau > 0\}$$

é identifiabile? Perchè?

c. Dopo che $X_1, \ldots, X_n$ è stato osservato, supponiamo che un altro campione $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ di $n$ misurazioni (indipendenti tra loro e indipendenti di $X$) del voltaggio dello stesso sistema elletrico è stato ottenuto con un strumento diverso, che non è difettoso. Sia $g_n$ la funzione di densità congiunta dei dati $X, Y$. Dimostrare che il modello statistico

$$\{g_n(\cdot \mid \mu, \sigma^2, \tau) \colon \mu, \sigma^2, \tau > 0\}$$

è identifiabile?

d. Dimostrare che la statistica tridimensionale

$$T(X, Y) = \left( \bar{X}, \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}, \sum_{i=1}^n \left( (X_i - \tfrac{\bar{X}+\bar{Y}}{2})^2 + (Y_i - \tfrac{\bar{X}+\bar{Y}}{2})^2 \right) \right)$$

è sufficiente per $\mu, \sigma^2, \tau$ nel modello statistico della parte c.

**Esercizio 6.** Consideriamo una situazione simile a quella del Esercizio 5. Assumiamo che, ad ogni momento, il voltaggio di un dato sistema elettrico sia una variabile aleatoria indipendente distribuita come una normale con media $\mu > 0$ e varianza $\sigma^2 > 0$, dove sia $\mu$ che $\sigma^2$ sono incogniti. Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione ottenuto di $n$ misurazioni di questo sistema elettrico.

Supponiamo che abbiamo due strumenti per misurare il sistema elettrico, uno difettoso (che mostra un valore $\tau$ unità piu grande del valore reale) e un non difettoso, ma che non sappiamo quale strumento è stato usato per ottenere ogni valore $X_i$. Definiamo una variabile aleatoria (nascosta) $Z_i$, tale che $Z_i = 1$ se il valore $X_i$ è stato ottenuto usando il strumento difettoso e $Z_i = 0$ se è stato ottenuto usando il strumento non difettoso. Assumiamo che i $Z_i$ siano indipendente tra loro e identicamente distribuiti, con $Z_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, dove $p$ è un parametro che aggiungiamo al modello.

a. Scrivere la funzione di densità del vettore $X$ dato $\mu, \sigma^2, \tau, p$ e $Z$.

b. Calcolare la probabilità di $Z_i = 1$ dato il vettore $X$.

**Esercizio 7.** Una distribuzione di probabilità di parametro $\theta \in \Theta$ appartiene alla *famiglia esponenziale* se esiste un valore $k \in \mathbb{Z}_+$ e esistono funzioni $c, h, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, t_1, t_2, \ldots, t_k$ tale che la funzione di densità della distribuzione nel punto $y$ può essere scritta come

$$c(\theta)h(y)\exp\left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i(\theta)t_i(y)\right),$$

dove $c, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ sono funzioni solo di $\theta$, mentre $h, t_1, t_2, \ldots, t_k$ sono funzioni solo di $y$. Per esempio, sia la distribuzione Bernoulli($\theta$) che la Normale($\mu, \sigma^2$) appartengono alla famiglia esponenziale, già che per la Bernoulli($\theta$) abbiamo

$$f(y) = \theta^y(1-\theta)^{1-y} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^y (1-\theta) = (1-\theta)\exp\left(y\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right),$$

cioè $c(\theta) = 1-\theta$, $h(y) = 1$, $k = 1$, $t_1(y) = y$ e $\eta_1(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, mentre per la Normale($\mu, \sigma^2$) con $\theta = (\mu, \sigma^2)$ abbiamo

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(\frac{-y^2+2y\mu-\mu^2}{2\sigma^2}\right),$$

cioè $c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$, $h(y) = 1$, $k = 2$, $t_1(y) = y^2$, $t_2(y) = y$, $\eta_1(\theta) = \frac{-1}{2\sigma^2}$ e $\eta_2(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2}$.

La famiglia esponenziale è molto nota in statistica, già che include tanti distribuzioni e si può ottenere risultati che sono validi per tutte le distribuzioni della famiglia esponenziale. Il vettore $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ è normalmente chiamato di *parametro naturale* della distribuzione. Allora, quando si vuole ottenere risultati validi per tutte le distribuzioni della famiglia esponenziale, si parametrizza la distribuzione nei suoi parametri naturali, si definisce i vettori $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ e $t(y) = (t_1(y), t_2(y), \ldots, t_k(y))$, e si scrive la funzione di densità nella forma

$$c(\eta)h(y)\exp\left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i t_i(y)\right) = c(\eta)h(y)\exp\left(\eta \cdot t(y)\right),$$

dove $\eta \cdot t(y)$ è il prodotto scalare tra i vettori $\eta$ e $t(y)$.

a. Dimostrare che le seguenti distribuzioni appartengono alla famiglia esponenziale: Binomiale($n, p$), Poisson($\theta$), Esponenziale($\theta$), Beta($\alpha, \beta$), Gamma($\alpha, \beta$) e Pareto($\theta$).

b. Sia un campione casuale $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ tale che ogni $X_i$ sia identicamente distribuito con una distribuzione dalla famiglia esponenziale di parametro naturale $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$. Calcolare la funzione di densità di $X$. La densità di $X$ appartiene alla famiglia esponenziale?

c. Consideriamo il campione della domanda precedente. Per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e ogni $x \in \Omega^n$, sia $T_j(x) = \sum_{i=1}^{n} t_j(x_i)$. Dimostrare che la statistica $T(X) = (T_1(X), T_2(X), \ldots, T_k(X))$ è una statistica sufficiente per $\eta$.

**Esercizio 8.** Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale dove ogni $X_i$ è indipendente e distribuito come Esponenziale($\theta$), dove $\theta > 0$ è un parametro sconosciuto. Considere la funzione di densità con parametri $\alpha, \beta, \gamma > 0$ definita dalla espressione

$$g(y) \propto y^{\alpha} e^{-\beta y - \gamma y^2}.$$

Chiamiamo questa distribuzione $G(\alpha, \beta, \gamma)$.

a. Dimostrare se $G(\alpha, \beta, \gamma)$ fa parte della famiglia esponenziale.

b. Dimostrare se $G(\alpha, \beta, \gamma)$ è una distribuzione coniugata dalla Esponenziale($\theta$).

**Esercizio 9.** Sia $T(X)$ una statistica sufficiente e completa per un modello statistico con parametro $\theta$. Supponiamo che abbiamo ottenuto un stimatore non distorto $\widehat{\theta}$ per $\theta$ che sia una funzione di $T(X)$. Dimostrare che $\widehat{\theta}$ è il stimatore UMVUE.

**Esercizio 10.** Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale dove ognuno $X_i$ è distribuito come Uniforme$(0, \theta)$. Si sa che $T(X) = X^{(1)}$ è una statistica sufficiente e completa per $\theta$.

a. Calcolare la distribuzione di densità di $X^{(1)}$.

b. Ottenere il stimatore UMVUE per $\theta$.

c. Calcolare la varianza del stimatore UMVUE per $\theta$.

d. Calcolare la informazione di Fisher della distribuzione Uniforme$(0, \theta)$ e paragonare il bound di Cramer-Rao per un stimatore non distorto con la varianza ottenuta nella parte c. Si ottiene qualcuna contradizione?

**Esercizio 11.** Un modello classico in genetica è quello di Hardy-Weinberg. Sia $AA$, $Aa$ e $aa$ i tre possibili genotipi in un locus con due alleli. Si assume che l'allele $A$ abbia frequenza data da un parametro $\theta$ e l'allele $a$ abbia frequenza $1 - \theta$. In questo modello, se scegliamo una persona a caso dalla popolazione, la probabilità che questa persona abbia il genotipo $AA$ è $\theta^2$, la probabilità che abbia il genotipo $aa$ è $(1 - \theta)^2$ e la probabilità che abbia il genotipo $Aa$ è $2\theta(1 - \theta)$. Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale di una popolazione ottenuta con rispetto al modello di Hardy-Weinberg, dove $X_i \in \{-1, 0, 1\}$ con $X_i = -1$ rappresentando che la $i$-esima persona ha genotipo $AA$, $X_i = 1$ rappresentando che la $i$-esima persona ha genotipo $aa$ e $X_i = 0$ rappresentando che la $i$-esima persona ha genotipo $Aa$. Il parametro $\theta \in [0, 1]$ è incognito.

a. Identificare una statistica sufficiente bidimensionale per $\theta$.

b. Esiste una statistica sufficiente unidimensionale per $\theta$? E esiste una statistica completa per $\theta$ che sia tridimensionale?

c. Calcolare il stimatore di massima verosimiglianza per $\theta$.

d. Calcolare la distribuzione a posteriori e il stimatore di Bayes per $\theta$ usando come distribuzione a priori la Beta$(\alpha, \beta)$, dove $\alpha$ e $\beta$ sono noti.

**Esercizio 12.** Un oggetto di massa 1 è messo in un campo di forza di intensità costante uguale a $\theta$, dove $\theta$ è incognito. Nei tempi $t_1, t_2, \ldots, t_n$, che sono conosciuti, si misura la posizione del oggetto, dove $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ denota il risultato delle misurazioni. Ogni $X_i$ ha un errore casuale $\varepsilon_i$; cioè, la misurazione $X_i$ differisce dal valore vero $\frac{\theta t_i^2}{2}$ di $\varepsilon_i$. Si assume che gli $\varepsilon_i$ siano indipendente tra loro e distribuiti come Normale$(0, \sigma^2)$.

a. Scrivere la densità $f_n$ dei dati $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

b. Calcolare il stimatore di massima verosimiglianza per $\theta$ e $\sigma^2$.

**Esercizio 13.** Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale dove ogni $X_i$ è indipendente tra loro e distribuito come una distribuzione Rayleigh$(\theta)$, con $\theta > 0$ e $X_i \in (0, \infty)$. La funzione di densità di una Rayleigh$(\theta)$ è

$$f(y) = \frac{y}{\theta^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\theta^2}\right).$$

a. Dimostrare che $X_i^2$ è Gamma$(1, \frac{1}{2\theta^2})$.
Suggerimento: scrivere la densità della Rayleigh e fare un cambio di variabile per arrivare alla densità della Gamma.

b. Il modello statistico descritto sopra parametrizzato in $\theta^2$ è identifiabile? Se sì, ottenere il stimatore di massima verosimiglianza per $\theta^2$.

c. Il stimatore di massima verosimiglianza per $\theta^2$ è distorto?

d. Il stimatore di massima verosimiglianza per $\theta^2$ è lo stimatore UMVUE?

**Esercizio 14.** Una azienda di trasporto contratta un statistico per fare un studio del tempo di atessa di una linea di autobus. Sia $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un campione casuale dove $X_i > 0$ rappresenta il tempo di atessa del $i$-esimo autobus, assumendo che gli $X_i$ siano indipendente tra loro. Nel primo momento, il statistico pensa di modellare gli $X_i$ come variabili aleatorie Esponenziale$(\theta)$, con un dato parametro $\theta$, ma è in dubbio se la distribuzione esponenziale è quella piu appropriata. Una seconda opzione sarebbe usare la funzione Pareto$(\theta)$. Dopo parlare con la azienda di trasporto, si è ottenuta l'informazione che la Pareto$(\theta)$ potrebbe essere la distribuzione più appropriata, ma nel dubbio il statistico ha risolto di lavorare con un modello statistico piu complesso, con un secondo parametro $\eta \in \{0, 1\}$ tale che se $\eta = 0$ la distribuzione dei $X_i$ è la Esponenziale$(\theta)$, cioè

$$f(y \mid \theta, \eta = 0) = \theta e^{-\theta y},$$

mentre se $\eta = 1$ la densità dei $X_i$ è data dalla funzione

$$f(y \mid \theta, \eta = 1) = \theta(y + 1)^{-\theta - 1}.$$

La funzione sopra è esattamente la densità della Pareto con un cambio di variabile tale che il supporto di $\theta$ e di $X_i$ sia $(0, \infty)$ tanto per $\eta = 0$ quanto per $\eta = 1$; infatti, se $g(y \mid \theta)$ è la densità della Pareto$(\theta)$ classica si ottiene che $f(y \mid \theta, \eta = 1) = g(y + 1 \mid \theta + 1)$.

a. Calcolare il valore atesso di $X_i$ come funzione di $\theta$ quando $\eta = 1$. Suggerimento: ricordare che la Pareto($\alpha$) classica ha valore atesso uguale a $\infty$ quando $\alpha \leq 2$.

b. Calcolare il stimatore di massima verosimiglianza per $(\theta, \eta)$.
Suggerimento: calcolare il valore di $\theta$ che massimizza la funzione di verosimiglianza per ognuno dei due possibili valori di $\eta$, poi paragonare i risultati ottenuti per scegliere il stimatore di massima verosimiglianza per $(\theta, \eta)$.

c. Ottenere la distribuzione a posteriori del stimatore di Bayes usando come distribuzione a priori per $(\theta, \eta)$ il prodotto di una Gamma($\alpha, \beta$) per la distribuzione di $\theta$ con una Bernoulli($p$) per la distribuzione di $\eta$.

**Esercizio 15.** Durante una campagna elettorale, ogni giorno un rappresentante di un partito va al centro della città per fare un sondaggio nella seguente maniera. Prima, il rappresentante chiede a una persona (scelta a caso) se voterebbe (sì o no) nel candidato del partito. Se la persona risponde *no*, allora il rappresentante chiede a una altra persona (scelta a caso) e cosí successivamente fino a trovare la prima persona che risponde *si*. Dopo di questo, il sondaggio è finito per quello giorno. Questo procedimento è ripetuto per $n$ giorni. Sia $X_i$ il numero di persone chi hanno risposto alla domanda nel $i$-esimo giorno. Assumiamo che gli $X_i$ siano indipendente tra loro, e che ogni $X_i$ abbia distribuzione Geometrica($\theta$), con un parametro sconosciuto $\theta \in (0, 1)$.

Dopo che il campione $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è stato ottenuto, si riceve l'informazione che il rappresentante del partito che ha realizzato il sondaggio aveva deciso di limitarsi a chiedere al massimo a $m$ persone in ogni giorno, dove $m$ è un parametro sconosciuto. Questo vuol dire che se, per esempio, nel $i$-esimo giorno, il rappresentante ha chiesto a $m$ persone e tutti l'hanno risposto *no*, allora il sondaggio del $i$-esimo giorno finisce e $X_i = m$. Se, invece, il rappresentante ha chiesto a $m$ persone e le primi $m - 1$ hanno risposto *no* e la $m$-esima ha risposto *si*, allora abbiamo anche che $X_i = m$.

a. Indicare la distribuzione di densità $f_n(x \mid \theta, m)$.

b. Indicare se la statistica $\sum_{i=1}^{n} x_i$ è sufficiente per $\theta$.

c. Calcolare il stimatore di massima verosimiglianza per $\theta$ e $m$.

## Tabella con le principale distribuzione di probabilità

| | |
|---|---|
| $Y \sim \textbf{Bernoulli}(p)$<br>• Parametro: $p \in [0,1]$.<br>• Supporto: $Y \in \{0,1\}$.<br>$f(y) = p^y(1-p)^{1-y},$<br>$\mathbb{E}(Y) = p, \quad \mathrm{Var}(Y) = p(1-p).$ | $Y \sim \textbf{Binomiale}(n,p)$<br>• Parametro: $p \in [0,1], n \in \{1,2,\ldots\}$.<br>• Supporto: $Y \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.<br>$f(y) = \binom{n}{y} p^y(1-p)^{n-y},$<br>$\mathbb{E}(Y) = np, \quad \mathrm{Var}(Y) = np(1-p).$ |
| $Y \sim \textbf{Uniforme}(a,b)$<br>• Parametro: $a,b \in (0,\infty)$ con $a < b$.<br>• Supporto: $Y \in [a,b]$.<br>$f(y) = \frac{1}{b-a},$<br>$\mathbb{E}(Y) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{(b-a)^2}{12}.$ | $Y \sim \textbf{Beta}(\alpha,\beta)$<br>• Parametro: $\alpha,\beta \in (0,\infty)$.<br>• Supporto: $Y \in [0,1]$.<br>$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1},$<br>$\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$ |
| $Y \sim \textbf{Geometrica}(p)$<br>• Parametro: $p \in [0,1]$.<br>• Supporto: $Y \in \{1,2,\ldots\}$.<br>$f(y) = (1-p)^{y-1}p,$<br>$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2}.$ | $Y \sim \textbf{Poisson}(\lambda)$<br>• Parametro: $\lambda \in (0,\infty)$.<br>• Supporto: $Y \in \{0,1,\ldots\}$.<br>$f(y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!},$<br>$\mathbb{E}(Y) = \lambda, \quad \mathrm{Var}(Y) = \lambda.$ |
| $Y \sim \textbf{Esponenziale}(\lambda)$<br>• Parametro: $\lambda \in (0,\infty)$.<br>• Supporto: $Y \in (0,\infty)$.<br>$f(y) = \lambda e^{-\lambda y},$<br>$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$ | $Y \sim \textbf{Gamma}(\alpha,\beta)$<br>• Parametro: $\alpha,\beta \in (0,\infty)$.<br>• Supporto: $Y \in (0,\infty)$.<br>$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1}e^{-\beta y},$<br>$\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$ |
| $Y \sim \textbf{Pareto}(\alpha)$<br>• Parametro: $\alpha \in (1,\infty)$.<br>• Supporto: $Y \in [1,\infty)$.<br>$f(y) = (\alpha-1)y^{-\alpha},$<br>$\mathbb{E}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & \text{se } \alpha > 2 \\ \infty, & \text{altrimenti} \end{cases},$<br>$\mathrm{Var}(Y) = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}, & \text{se } \alpha > 3 \\ \infty, & \text{altrimenti} \end{cases}$ | $Y \sim \textbf{Normale}(\mu,\sigma^2)$<br>• Parametro: $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in (0,\infty)$.<br>• Supporto: $Y \in \mathbb{R}$.<br>$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$<br>$\mathbb{E}(Y) = \mu, \quad \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2.$ |