Sul Rango di Mordell-Weil per Famiglie di Varietà Abeliane

Rania Wazir
wazir@dm.unito.it
Dipartimento di Matematica, Università di Torino.

Rimini, 18-22 Maggio 2004

Giornate di Geometria Algebrica ed argomenti correlati VII

I. INTRODUZIONE

A. Il Gruppo di Mordell-Weil

Siano

- k un campo di numeri
- A una varietà abeliana definita su k

L'insieme dei punti razionali $A(k)$ è un gruppo abeliano, chiamato il *Gruppo di Mordell-Weil di A*.

Il Teorema di Mordell-Weil afferma che

$$A(k) \cong A_{\text{tors}} \oplus \mathbb{Z}^r$$

Il numero r è il *Rango di Mordell-Weil di A*.

I. INTRODUZIONE

B. Principali Problemi

1. Non esistono ancora algoritmi incondizionati (*unconditional*) per calcolare r

2. Congettura Comune: Dato $N > 0$, esistono curve ellittiche $E/\mathbb{Q}$ tali che il rango di E è maggiore di N?

3. Congettura di Birch & Swinnerton-Dyer:

$$\operatorname*{ord}_{s=1} L(A, s) = \text{rango}\, A(k)?$$

I. INTRODUZIONE

C. Famiglie di Varietà Abeliane

Consideriamo un "buon" morfismo

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$$

tra varietà proiettive e liscie,
definite su k.

Definiamo $K := k(\mathcal{X})$, e supponiamo che la fibra generica $\mathcal{A}_\rho/K$ sia una varietà abeliana. Allora $\mathcal{A}$ è una *famiglia di varietà abeliane*, anche chiamata *fibrazione abeliana*.

Si può identificare
il gruppo dei punti razionali $\mathcal{A}_\rho(K)$
col gruppo delle sezioni razionali $\mathcal{A}(\mathcal{X}/k)$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{X}/k) := \left\{ \sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{A} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma \text{ è una mappa} \\ \text{razionale definita su } k. \end{array} \right\}$$

I. INTRODUZIONE

D. Il Gruppo di Mordell-Weil

Siano

- K un campo finitamente generato su $\mathbb{Q}$

- A una varietà abeliana definita su K

L'insieme dei punti razionali $A(K)$ è un gruppo abeliano, chiamato il *Gruppo di Mordell-Weil di* A.

Il Teorema di Mordell-Weil afferma che

$$A(K) \cong A_{\text{tors}} \oplus \mathbb{Z}^r$$

Il numero r è il *Rango di Mordell-Weil di* A.

I. INTRODUZIONE

D. Il Gruppo di Mordell-Weil

Anche in questo caso, abbiamo
problemi nel calcolare r, e nel
determinare quanto può essere grande.

C'è anche una versione della
Congettura di Birch & Swinnerton-Dyer,
dovuta a Tate (1965).

II. TEOREMA DI SPECIALIZZAZIONE

A. Vantaggi delle Fibrazioni Abeliane

Per le fibrazioni abeliane, ci sono anche vantaggi che vengono dalla struttura geometrica aggiunta:

1. Nel caso di una superficie ellittica $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, abbiamo la *Formula di Shioda-Tate*:

   $$\operatorname{rango} \mathrm{NS}(\mathcal{E}/k) = 2 + \operatorname{rango} \mathcal{E} + \sum_{x \in \Delta} (m_x - 1)$$

2. Nel caso di una fibrazione abeliana $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, c'è il *Teorema di Specializzazione* (Silverman, Crelle '83):

   Per quasi tutti $x \in \mathcal{C}(k)$,

   $$\operatorname{rango} \mathcal{A}_x(k) \geq \operatorname{rango} \mathcal{A}_\rho(K).$$

II. TEOREMA DI SPECIALIZZAZIONE

B. Un Analogo in Più Dimensioni

Consideriamo adesso il caso $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ con $\dim \mathcal{X} > 1$.

Un risultato di Masser(1989) dimostra che l'insieme

$\{x \in \mathcal{X}(k) \mid \text{rango}\, \mathcal{A}_x(k) < \text{rango}\, \mathcal{A}_\rho(K)\}$

è un "'thin set"'.

Però, a noi interessa un'altra generalizzazione del risultato di Silverman.

Per quasi ogni divisore $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$, $\pi_D : \mathcal{A}_D \to D$ è anche una fibrazione abeliana.

Vogliamo confrontare il rango di $\mathcal{A}_\rho(K)$ col rango di $\mathcal{A}_{D,\rho}(k(D))$.

II. TEOREMA DI SPECIALIZZAZIONE

B. Un Analogo in Più Dimensioni

Se prendiamo inoltre un morfismo $\mu : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tale che la fibra generica è una curva liscia, riusciamo infatti a dimostrare:

$$\text{rango}\, \mathcal{A}_{D,\rho}(k(D)) \geq \text{rango}\, \mathcal{A}_\rho(K)$$

per quasi ogni divisore D/k orizzontale rispetto a μ (cioè $\mu(D) = \mathcal{Y}$).

Infatti, si può dimostrare che esiste un numero finito di morfismi

$$\mu_i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_i$$

tale che ogni divisore D è orizzontale rispetto ad almeno un μ_i.

II. TEOREMA DI SPECIALIZZAZIONE

B. Un Analogo in Più Dimensioni

Componendo μ con π e prendendo la fibra generica, si ottiene:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & & \\ \downarrow\pi & & A \\ \mathcal{X} & \rightsquigarrow & \downarrow\lambda \\ \downarrow\mu & & C \\ \mathcal{Y} & & \end{array}$$

dove A e C sono definite su $F := k(\mathcal{Y})$, e la fibra generica $A_\eta = \mathcal{A}_\rho$ è una varietà abeliana definita su $K := k(\mathcal{X})$.

In questo contesto ("set-up"), i divisori orizzontali $D \in \mathrm{Div}(\mathcal{X})$ corrispondono a punti in $C(F)$, e noi cerchiamo di dimostrare che:

Data una fibrazione $\lambda : A \to C$ di varietà abeliane su F, per quasi tutti $x \in C(F)$,

$$\text{rango}\, A_x(F) \geq \text{rango}\, A_\eta(K).$$

III. HEIGHT MACHINE

A. La Funzione Altezza

Sia $\mathcal{V}$ uno spazio proiettivo, definito su un campo globale L.

– **Altezza di Weil**

Se L è un campo di numeri, e D è un divisore (ampio) di $\mathcal{V}$, si può definire una funzione altezza h_D associata all'immersione $\phi_D : \mathcal{V} \to \mathbb{P}^n$.

– **Altezza di Moriwaki**
(Inventiones, 2000)

Se L è un campo finitamente generato su $\mathbb{Q}$, e D è un divisore di $\mathcal{V}$, si può definire una funzione altezza h_D^{Mor} associata a D utilizzando la teoria d'intersezione di Arakelov.

III. HEIGHT MACHINE

A. La Funzione Altezza

– Altezza Geometrica

Se M è un campo globale, C è una curva proiettiva su M, e $L := M(C)$, allora si definisce, per un punto $x \in L$, $h_L^{\mathrm{geom}}([x, 1])$ come il grado del morfismo $[x, 1] : C \to \mathbb{P}^1$.

– Altezza Canonica

Se $\mathcal{V}$ è una varietà abeliana, c'è una altezza canonica $\widehat{h}$ associata a ciascuna funzione altezza di cui sopra.

III. HEIGHT MACHINE

B. Proprietà Essenziali

Sia $\mathcal{V}$ una varietà proiettiva liscia definita su un campo globale L, D un divisore, e h_D la funzione altezza associata.

1. Se E è un altro divisore t.c. $D \sim E$,

$$h_D = h_E + O(1).$$

2. Se E è qualsiasi altro divisore,

$$h_{D+E} = h_D + h_E + O(1)$$

III. HEIGHT MACHINE

B. Proprietà Essenziali

3. Se $|D|$ contiene un divisore effettivo, allora esiste una costante N t.c.

$$h_D(P) > N \quad \text{per ogni } P \in \mathcal{V}(\bar{L}).$$

4. Se D è ampio ed E è qualsiasi altro divisore, esiste una costante N t.c.

$$h_E < N h_D + O(1).$$

5. Se $f : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ è un morfismo tra varietà liscie:

$$h_{\mathcal{W},f^*D} = h_{V,D} \circ f + O(1).$$

III. HEIGHT MACHINE

B. Proprietà Essenziali

6. Se X è una curva liscia proiettiva, D è un divisore di grado $d > 0$, ed E è un divisore di grado e, allora

$$\lim_{h_D^{\mathrm{arith}}(t) \to \infty} \frac{h_E^{\mathrm{arith}}(t)}{h_D^{\mathrm{arith}}(t)} = \frac{e}{d}\,.$$

7.* Sia M un numero, e N un intero positivo. Allora l'insieme

$$\left\{ P \in \mathcal{V}(\bar{L}) \;\middle|\; \begin{array}{l} h_D(P) \le M \\ [L(P) : L] \le N \end{array} \right\} \text{ è finito.}$$

III. HEIGHT MACHINE

B. Proprietà Essenziali

Sia $\mathcal{V}$ una varietà abeliana definita su un campo globale L, D un divisore, h_D la funzione altezza associata, e $\hat{h}_D$ la funzione altezza canonica.

1. $\hat{h}_D = h_D + O(1)$.

2. Se E è un altro divisore,

$$\hat{h}_{D+E} = \hat{h}_D + \hat{h}_E$$

3. L'altezza canonica $\hat{h}_D$ è una funzione quadratica su $\mathcal{V}(\bar{L})$.

4. * Se inoltre D è ampio,

$$\begin{array}{lcl} \hat{h}_D(P) \geq 0 & & \text{per ogni } P \in \mathcal{V}(\bar{L}). \\ \hat{h}_D(P) = 0 & \iff & P \text{ è punto di torsione.} \end{array}$$

III. HEIGHT MACHINE

B. Applicazione

Torniamo alla nostra fibrazione
$\lambda : A \to C$ definita su F.

Sia $C^0 := \{x \in C(\bar{F}) \mid A_x$ è nonsingolare$\}$.

Fissiamo D un divisore su A, e sia D_x la restrizione alla fibra A_x per ogni $x \in C^0$.

Scegliamo le seguenti funzioni altezza:

Varietà	Divisore	Altezza
A	D	h_D^{Mor}
A_x per $x \in C^0$	D_x	$\hat{h}_{D_x}^{\mathrm{Mor}}$
A_η	D_η	$\hat{h}_{D_\eta}^{\mathrm{geom}}$
C	E	h_E^{Mor}

III. HEIGHT MACHINE

B. Applicazione

Sia $U := \lambda^{-1}(C^0)$.

Incollando insieme le funzioni altezza $\widehat{h}_{D_x}^{\mathrm{Mor}}$, si ottiene anche una altezza "canonica" $\widehat{h}_D^{\mathrm{Mor}}$ su U.

Con queste funzioni altezza, si dimostrano, esattamente come ha fatto Silverman per famiglie di varietà su k, i seguenti teoremi:

IV. TEOREMI PRINCIPALI

Teorema 1. *Esiste una costante β, dipendente da D, E, e dalla famiglia $A \to C$, tale che*

$$\left|\hat{h}_D(P) - h_L^{\mathsf{Mor}}(P)\right| < \beta\, h_E^{\mathsf{Mor}}(P) + O(1) \qquad \forall P.$$

L'errore $O(1)$ dipende dalla scelta delle altezze h_L^{Mor} e h_E^{Mor} ma non da P.

Questo teorema vale anche per $\dim C > 1$.

IV. TEOREMI PRINCIPALI

Ora si considera il caso dove C è una curva liscia proettiva definita su F, e si fissa una altezza aritmetica su C come segue.

Sia E un divisore su C con $\deg E > 0$, e definiamo

$$h_C^{\text{arith}} := \frac{1}{\deg E} h_E^{\text{Mor}}.$$

Teorema 2. *Con la stessa notazione di sopra, fissiamo una sezione $P \in A(C)$. Allora*

$$\lim_{\substack{t \in C^0(\overline{K}) \\ h_C^{\text{arith}}(t) \to \infty}} \frac{\hat{h}^{\text{Mor}}_{(A_t, D_t)}(P_t)}{h_C^{\text{arith}}(t)} = \hat{h}^{\text{geom}}_{(A_\rho, D_\rho)}(P_\rho).$$

La proprietà (6) delle altezze indica che il risultato non dipende dalla scelta dell'altezza su C.

IV. TEOREMI PRINCIPALI

Sia $x \in C(\overline{F})$ un punto tale che A_x è nonsingolare. Allora la mappa di specializzazione

$$\sigma_x : A(C/F) \longrightarrow A_x(\overline{F})$$

è un omomorfismo fra il gruppo delle sezioni e il gruppo dei punti sulla fibra A_x.

Per semplificare l'annuncio del seguente teorema, supponiamo che la $F(C)/F$-traccia di A_η è zero (cioè, che la famiglia A non ha una parte costante).

Teorema 3. *L'insieme*

$$\left\{x \in C(\overline{F}) : \sigma_x \text{ non è iniettiva}\right\}$$

è di altezza limitata in $C(\overline{F})$.

In particolare, se $d \geq 1$, allora σ_x è iniettiva per quasi tutti $x \in \cup_{[L:F]\leq d} C(L)$, e quindi escludendo un numero finito di punti $x \in C$,

$$\text{rango}\, A_x(F) \geq \text{rango}\, A_\eta(K).$$

V. DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3

Siano r il rango di Mordell-Weil di $A(C)$, e $P^1, ..., P^r$ i generatori per la parte libera.

Fissiamo un divisore ampio D su A.

Sulla fibra generica A_η, definiamo l'accoppiamento altezza

$$\langle , \rangle_\eta : A_\eta\left(K(C)\right) \times A_\eta\left(K(C)\right) \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\langle P_\eta, Q_\eta \rangle_\eta \quad := \quad & \frac{1}{2}\Big(\widehat{h}^{\mathsf{geom}}_{(A_\eta, D_\eta)}\left(P_\eta + Q_\eta\right) \\ & \qquad - \widehat{h}^{\mathsf{geom}}_{(A_\eta, D_\eta)}\left(P_\eta\right) - \widehat{h}^{\mathsf{geom}}_{(A_\eta, D_\eta)}\left(Q_\eta\right)\Big)\end{aligned}$$

Nello stesso modo, si definisce anche un accoppiamento altezza sulla fibra A_t:

$$\langle , \rangle_t : A_t\left(\overline{K}\right) \times A_t\left(\overline{K}\right) \to \mathbb{R}.$$

V. DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3

Osserviamo che questi accoppiamenti sono bilineari (proprietà 3 delle altezze canoniche). Inoltre, il Teorema 2 indica che

$$\lim_{\substack{t \in C^0(\overline{K}) \\ h_C^{\mathrm{arith}}(t) \to \infty}} \frac{\langle P_t, Q_t \rangle_t}{h_C^{\mathrm{arith}}(t)} = \langle P_\eta, Q_\eta \rangle_\eta .$$

Quindi, formando il determinante con le sezioni generatrici $P^1, ..., P^r$ di $A(C)$, si ottiene

$$\lim_{\substack{t \in C^0(\overline{K}) \\ h_C^{\mathrm{arith}}(t) \to \infty}} \frac{\det \left(\langle P_t^i, P_t^j \rangle_t \right)_{1 \le i,j \le r}}{h_C^{\mathrm{arith}}(t)}$$

$$= \det \left(\langle P_\eta^i, P_\eta^j \rangle_\eta \right)_{1 \le i,j \le r} .$$

V. DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3

La proprietà 4 delle altezze canoniche indica che $\langle , \rangle_\eta$ è non-degenere su $A_\eta(K(C))/$(torsione).

Quindi la parte destra del limite non è zero

V. DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3

Allora per $h_C(t)$ abbastanza grande,

$$\det\left(\langle P_t^i, P_t^j\rangle_t\right)_{1\leq i,j\leq r} \neq 0.$$

Abbiamo così dimostrato che $P_t^1, ..., P_t^r \in A_t(\bar{K})$ sono $\mathbb{Z}$-linearmente indipendenti, e quindi che, per $h_C(t)$ abbastanza grande,

$$A(C)/(\text{torsione}) \longrightarrow A_t(\bar{K})/(\text{torsione})$$

è iniettiva.

VI. DOMANDE APERTE

Ispirandosi dai problemi più interessanti riguardanti le funzioni altezza delle varietà abeliane su un campo di numeri k, si pongono delle domande analoghe per le funzioni altezza di Moriwaki:

1. **Congettura di Lehmer.**
   Dato A/F una varietà abeliana e D un divisore ampio, esiste una costante β tale che
   $$h_D^{\mathrm{Mor}}(P) \geq \frac{\beta}{d} \quad \forall P \in A(F)/(\text{torsione}),$$
   dove $d := [F(P) : F]$.

VI. DOMANDE APERTE

2. **Congettura di Lang.**
Sia $\pi : A \to C$ una fibrazione abeliana, e D un divisore ampio tale che D_η sia simmetrico.

Esiste una costante $\beta > 0$ tale che, per ogni punto razionale e non di torsione Q di una fibra liscia A_x,

$$\widehat{h}_D^{\mathrm{Mor}}(Q) > \beta h_C(x).$$

VI. DOMANDE APERTE

3. **Divisibilità della mappa di specializzazione.**

In questo intervento abbiamo dimostrato che, per una fibrazione abeliana

$$\pi : A \to C,$$

la mappa di specializzazione

$$\sigma_x : A(C) \longrightarrow A_x(\overline{F})$$

è quasi sempre iniettiva.

Ma è anche un problema molto interessante studiare il conucleo di questa mappa, per determinare quando è un isomorfismo.