SUL RANGO DI MORDELL-WEIL PER FAMIGLIE DI VARIETÀ ABELIANE

RANIA WAZIR

Siano K un campo finitamente generato su $\mathbb{Q}$ e A una varietà abeliana definita su K. Il Teorema di Mordell-Weil afferma che l'insieme dei punti razionali $A(K)$ è un gruppo abeliano finitamente generato; il suo rango, detto rango di Mordell-Weil di A, è un invariante aritmetico di grande interesse, che però rimano un mistero fino a oggi.

Per esempio, nel caso di una curva ellittica (cioè di una varietà abeliana di dimensione 1) definita su $\mathbb{Q}$, è una congettura comune che esistono curve di rango arbitrariamente alto - però fin'ora il rango più alto trovato è 26.

Una linea di ricerca molto promettente consiste nello studiare famiglie di varietà abeliane $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ definite su un campo di numeri k (cioè π è un morfismo proprio e piatto tra varietà proiettive liscie, tale che la fibra generica $\mathcal{A}_\rho$ è una varietà abeliana definita su $F := k(\mathcal{X})$) e di confrontare il rango di $\mathcal{A}_\rho(F)$ con il rango di $\mathcal{A}_x(k)$ per $x \in \mathcal{X}(k)$.

Nel caso in cui $\mathcal{X}$ è una curva, il Teorema di Specializzazione di Silverman prova che $\text{rango}\mathcal{A}_\rho(F) \leq \text{rango}\mathcal{A}_x(k)$ per quasi ogni $x \in \mathcal{X}(k)$. La dimostrazione consiste nel misurare la variazione della funzione altezza di Weil in una famiglia di varietà abeliane definite su k. In questo intervento, dimostreremo come le funzioni altezza aritmetiche di Moriwaki possano essere utilizzate per ottenere lo stesso risultato per una famiglia $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ definita su K, fornendo così un bel esempio della "'Height Machine"' in azione.

E-mail address: `wazir@dm.unito.it`