# Geometria birazionale degli spazi di moduli

Claudio Fontanari

Giornate di Geometria Algebrica
ed argomenti correlati VII
Rimini, 18–22 Maggio 2004

Unità di ricerca di Trento
dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica

Progetto di ricerca post-doc cofinanziato
dalla Provincia Autonoma di Trento

**T**rento
**A**ctivity in
**S**paces of
**C**urves and
**A**pplications

Direttore: *Marco Andreatta*

Tutor: *Edoardo Ballico*

Borsista: *Claudio Fontanari*

## Abstract

Nonostante lo spazio dei moduli delle curve sia stato intensamente investigato da più di un secolo a questa parte, la sua geometria birazionale rimane tuttora misteriosa sotto molti aspetti. Nel mio intervento mi propongo di delineare il quadro delle conoscenze attuali in materia focalizzandomi sui problemi aperti che mi sembrano più significativi (cono ampio, cono effettivo e questioni collegate).

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

spazio dei moduli delle curve stabili $n$-puntate di genere $g$

$[(C; p_1, \ldots, p_n)] \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

$C$ curva proiettiva, connessa, ridotta, di genere aritmetico $g$ con al più nodi ordinari come singolarità

$(p_1, \ldots, p_n)$ ennupla ordinata di punti lisci di $C$

ogni componente razionale di $C$ contiene almeno tre punti speciali (o singolari o marcati); equivalentemente, il gruppo di automorfismi di $C$ è finito.

$\overline{\mathcal{M}}_g := \overline{\mathcal{M}}_{g,0}$

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è una varietà irriducibile proiettiva normale con singolarità di tipo quoziente finito (localmente quoziente di una varietà liscia per un gruppo finito) e canoniche (ogni forma pluricanonica sulla parte liscia si estende a una forma pluricanonica su una desingolarizzazione).

**Problema:** studiare la geometria birazionale di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ e in particolare di $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Severi, 1915:

*le curve di dato genere $p$ formano una varietà algebrica $H$ irriducibile. Ritengo probabile che la varietà $H$ sia razionale o quanto meno che nell'equazione di una curva piana di genere $p$ i moduli si possano far comparire razionalmente. La considerazione delle curve piane minime di dato genere $p$, mostra agevolmente che questo fatto è vero per $p \leq 11$; la considerazione delle curve sghembe minime di genere $p$, definite come intersezioni parziali di superficie, permette di salire ad ulteriori valori di $p$; ecc.*

**Problema meno ambizioso:** calcolare la dimensione di Kodaira di $\overline{\mathcal{M}}_g$.

**Definizione:** la dimensione di Kodaira di una varietà proiettiva $X$ è la massima dimensione dell'immagine di $X$ in $\mathbb{P}^N$ tramite la mappa razionale determinata dal sistema lineare $|mK|$, dove $K$ è il divisore canonico e $m \geq 1$, oppure $-1$ se $|mK| = \emptyset$ per ogni $m \geq 1$.

**Osservazione:**

razionale $\Longrightarrow$ unirazionale $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ razionalmente connesso $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ unirigato $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ dimensione di Kodaira negativa.

**Problema:** determinare il divisore canonico di $\overline{\mathcal{M}}_g$.

$\mathcal{M}_g$ aperto di $\overline{\mathcal{M}}_g$ corrispondente alle curve lisce

Harer, 1983:

$H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cdot \lambda$

dove $\lambda$ è la classe di Hodge:

$\lambda := c_1(\Lambda)$

$\pi : \mathcal{M}_{g,1} \longrightarrow \mathcal{M}_g$

$\Lambda := \pi_* \omega_\pi$

$\omega_\pi$ fascio dualizzante relativo

$\Lambda$ fibrato di Hodge, informalmente: fibrato vettoriale di rango $g$ la cui fibra sul punto $[C]$ in $\mathcal{M}_g$ è lo spazio delle forme olomorfe $H^0(C, K_C)$

$\Delta := \overline{\mathcal{M}}_g \setminus \mathcal{M}_g$ bordo (di codimensione 1)

Componenti irriducibili:

- $\Delta_0$, il cui elemento generico è rappresentato da una curva irriducibile con un solo nodo;

- $\Delta_i$ ($i = 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$), il cui elemento generico è l'unione di una curva liscia di genere $i$ e una di genere $g - i$ che si intersecano in un nodo.

$\delta$, $\delta_i$ le classi di $\Delta$, $\Delta_i$ ($i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$) in $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$

Arbarello e Cornalba, 1987:

$\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_g) \otimes \mathbb{Q}$ è liberamente generato da $\lambda$ e $\delta_i$ ($i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$)

Harris e Mumford, 1982:

$K$ divisore canonico di $\overline{\mathcal{M}}_g$

$K = 13\lambda - 2\delta + \frac{1}{2}\delta_1$

Eisenbud e Harris, 1987:

$E^r_d$ divisore di Brill-Noether in $\overline{\mathcal{M}}_g$, corrispondente alle curve $C$ di genere $g$ che possiedono una serie lineare speciale $g^r_d$ di dimensione $r$ e grado $d$ con numero di Brill-Noether $\rho(g,r,d) = g - (r+1)(g-d+r) = -1$

$$E^r_d := m\left((g+3)\lambda - \left(\frac{g+1}{6}\right)\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor}\left(i(g-i)\right)\delta_i\right)$$

**Corollario:**

Se $g \geq 23$ allora $K = cE^r_d + E$ con $E$ effettivo e $c \geq 0$, in particolare la dimensione di Kodaira di $\overline{\mathcal{M}}_g$ è positiva per $g \geq 23$.

**Problema:** e se $g \leq 22$ ?

Harris e Morrison, 1990:

**Congettura:** se $E = a\lambda - b\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} b_i\delta_i$ è un divisore effettivo su $\overline{\mathcal{M}}_g$, allora

$$\frac{a}{b} \geq 6 + \frac{12}{g+1}$$

In particolare, per $g \leq 22$ nessun multiplo di $K$ è effettivo e la dimensione di Kodaira è negativa.

**Problema:** come provare la Congettura ?

**Principio:** se $B \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ è una curva passante per il punto generale di $\overline{\mathcal{M}}_g$, allora per ogni divisore effettivo $E$ su $\overline{\mathcal{M}}_g$ si ha $E.B \geq 0$. In particolare, se $E = a\lambda - b\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} b_i\delta_i$ e $\Delta_i.B = 0$ per ogni $i \geq 1$, allora

$$\frac{a}{b} \geq \frac{\delta.B}{\lambda.B}$$

Tan, 1998:

La Congettura vale per $g \leq 11$, $g \neq 10$.

Idea: la curva generale di genere $g \leq 11$, $g \neq 10$, si muove in un fascio di Lefschetz di sezioni iperpiane di una superficie di tipo $K3$.

Farkas e Popa, 2002:

La Congettura è falsa in $\overline{\mathcal{M}}_{10}$.

Idea: il divisore effettivo determinato dalle curve di genere 10 che giacciono su una superficie di tipo $K3$ fornisce un controesempio.

Bruno, Fontanari e Verra, in preparazione:

Sia $E = a\lambda - b\delta_0 - \sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} b_i\delta_i$ un divisore effettivo su $\overline{\mathcal{M}}_g$.

- se $g = 12$ allora $\frac{a}{b} \geq 7$, in particolare la Congettura è vera in $\overline{\mathcal{M}}_{12}$
- se $g = 13$ allora $\frac{a}{b} \geq \frac{27}{4}$
- se $g = 14$ allora $\frac{a}{b} \geq \frac{20}{3}$

Idea: la curva generale si muove su una superficie canonica che è intersezione completa di ipersuperficie di grado basso.

**Problema:** determinare il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Rulla, 2001:

**Proposizione:** il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_3$ è l'inviluppo convesso di $\Delta_0$, $\Delta_1$ e del divisore $H$ corrispondente al luogo iperellittico.

**Domanda:** il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_g$ è simpliciale per ogni $g$, magari generato dai $\Delta_i$ e da analoghi di $H$ (ad esempio, il divisore di Brill-Noether) ?

**Osservazione:** il cono effettivo non è noto nemmeno in genere zero!

$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$

Fulton, 1996:

**Congettura:** ogni divisore effettivo su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ è linearmente equivalente a una combinazione effettiva di divisori di bordo.

Keel 2000, Vermeire 2002:

La Congettura di Fulton è falsa per $n \geq 6$.

Idea: $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ è ottenuto a partire da $\mathbb{P}^3$ scoppiando successivamente cinque punti generali e le trasformate proprie delle corde per ogni coppia di punti (modello di Kapranov). La trasformata propria di una quadrica liscia di $\mathbb{P}^3$ è un divisore effettivo che non è combinazione lineare effettiva di divisori di bordo.

Hassett e Tschinkel, 2001:

Determinazione di un sistema di generatori per il cono effettivo di $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$ utilizzando pesantemente il calcolatore.

**Problema analogo:** determinare il cono ampio di $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ ha una stratificazione naturale per tipo topologico, gli strati di codimensione $k$ corrispondono alle curve con almeno $k$ punti singolari.

Fulton, 1996:

**Congettura:** un divisore su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è ampio se e solo se ha intersezione positiva con tutti gli strati unidimensionali.

Gibney, Keel e Morrison, 2002:

**Teorema:** la Congettura di Fulton su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ è implicata dalla Congettura corrispondente su $\overline{\mathcal{M}}_{0,g+n}$, pertanto la Congettura è vera su $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ per ogni $g$ e per ogni $n$ se e solo se è vera su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ per ogni $n$.

**Domanda:** se un divisore su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ ha intersezione non-negativa con tutti gli strati unidimensionali segue che è linearmente equivalente a una combinazione effettiva di divisori di bordo ?

**Osservazione:** una risposta affermativa implicherebbe la Congettura di Fulton: infatti, se $D$ è un divisore come nella domanda e $C$ è un ciclo effettivo unidimensionale tale che $D.C < 0$, allora $C \subseteq \Delta$ e si conclude per induzione.

Farkas e Gibney 2001, Fontanari 2003:

**Proposizione:** per $n \leq 6$ la risposta è affermativa.

Idea: esprimere i divisori in una base opportuna definita induttivamente.

Per $n \geq 7$ è un problema aperto!

Arbarello, Fontanari e Morrison, programma:

Formulare in termini di una base opportuna una Congettura più debole su $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ che implichi la Congettura di Fulton su $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Gibney, 2003:

Verifica della Congettura di Fulton su $\overline{\mathcal{M}}_g$ per $g \leq 24$ utilizzando pesantemente il calcolatore.