IN420 – Teoria dell'Informazione

Presentazione del corso

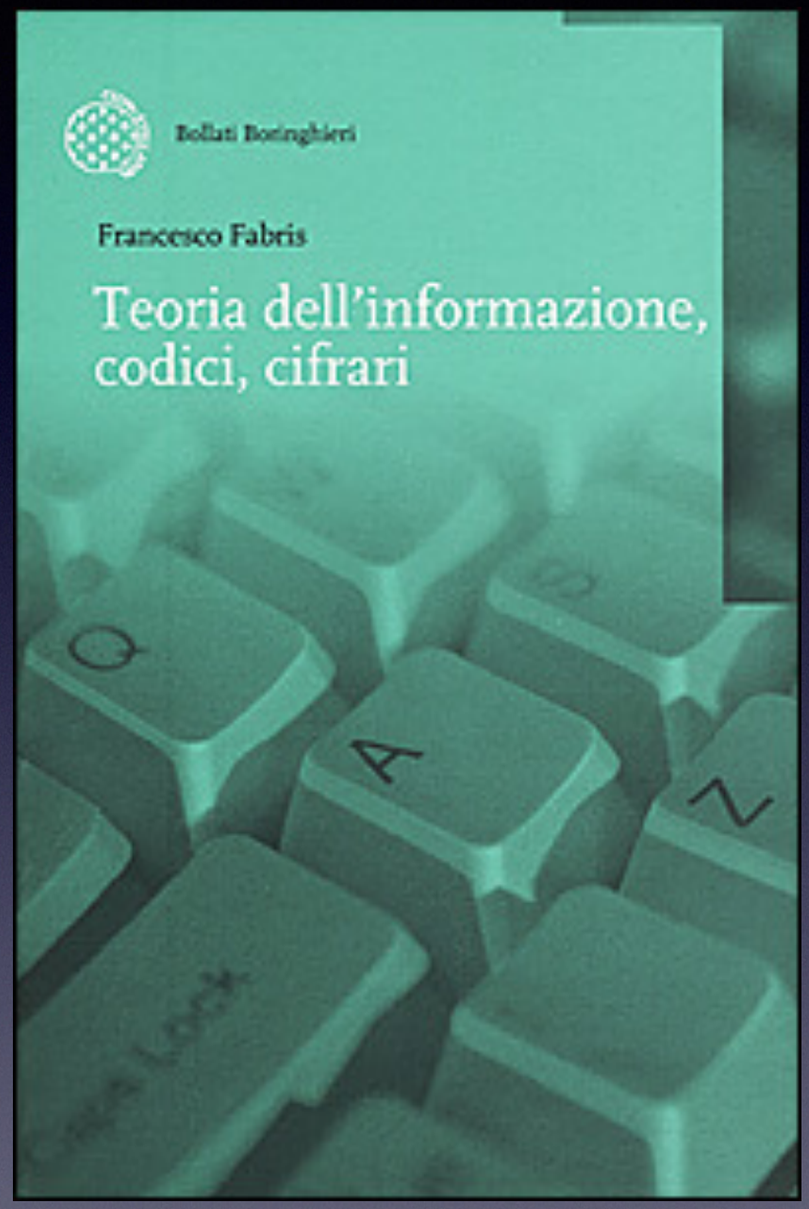
Prof. Vincenzo Bonifaci
Università degli Studi Roma Tre

Contatti ed orari

- Email: vincenzo.bonifaci@uniroma3.it
- Web: http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/vbonifaci/
- Ricevimento: Giovedì 14.00-15.00 *
- Lezioni:
  - Martedì, 15.30-17.30 (A)
  - Giovedì, 10.30-12.30 (A)
- Esercitazioni e complementi:
  - Venerdì, 15.30-17.30 (A)

Libro di testo

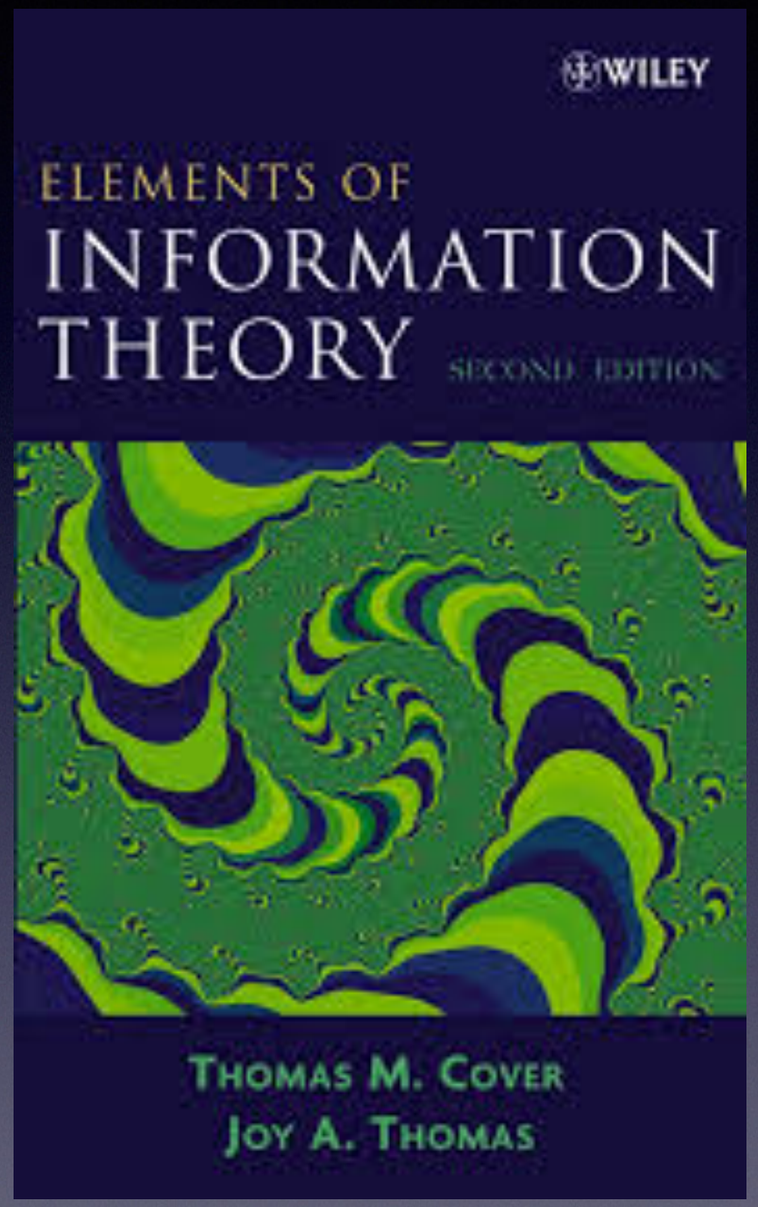
- Francesco Fabris
  Teoria dell'informazione, codici, cifrari
  Bollati Boringhieri, 2001



Ulteriori testi utili

- Thomas M. Cover, Joy A. Thomas, *Elements of Information Theory* Wiley, 1991

- Altri testi di riferimento sono indicati sulla scheda GOMP del corso



Prerequisiti

- Necessari:
  - Concetti elementari di probabilità discreta (es.: distribuzione di probabilità, varianza, valore atteso) [CP210]
- Consigliati:
  - Ulteriori concetti di probabilità (es.: condizionamento, legge dei grandi numeri) [CP410]
- Utili, ma del tutto opzionali:
  - Qualche rudimento di statistica (es.: stimatori, stima a massima verosimiglianza) [ST410]

Modalità di esame

- Esame orale (tipicamente alla lavagna)

Introduzione alla Teoria dell'Informazione

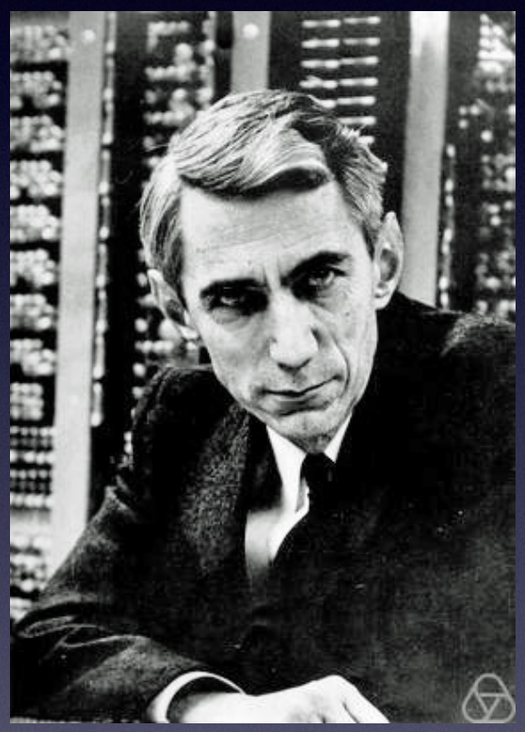
Una telefonata del 25 Aprile 1945

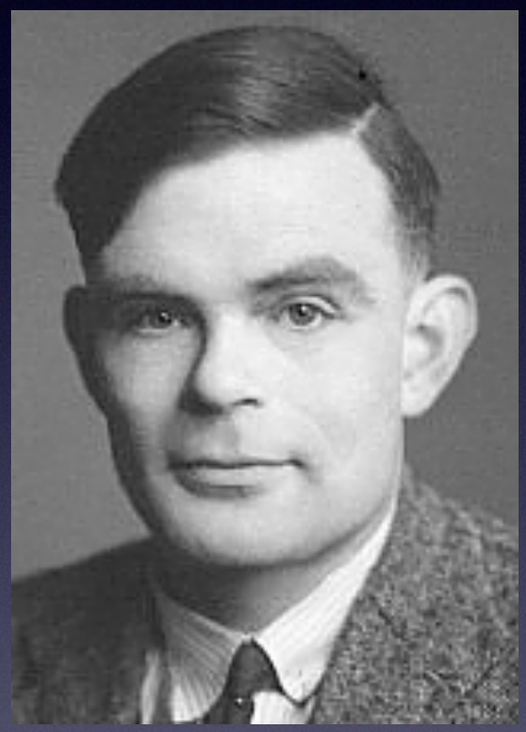
- Winston Churchill chiama Harry S. Truman per discutere l'offerta di resa di Heinrich Himmler
- La conversazione avviene tramite il sistema di cifratura vocale SIGSALY
- *Il sistema è veramente al sicuro da intercettazioni?*

II SIGSALY

Sviluppo del SIGSALY ai Bell Telephone Labs

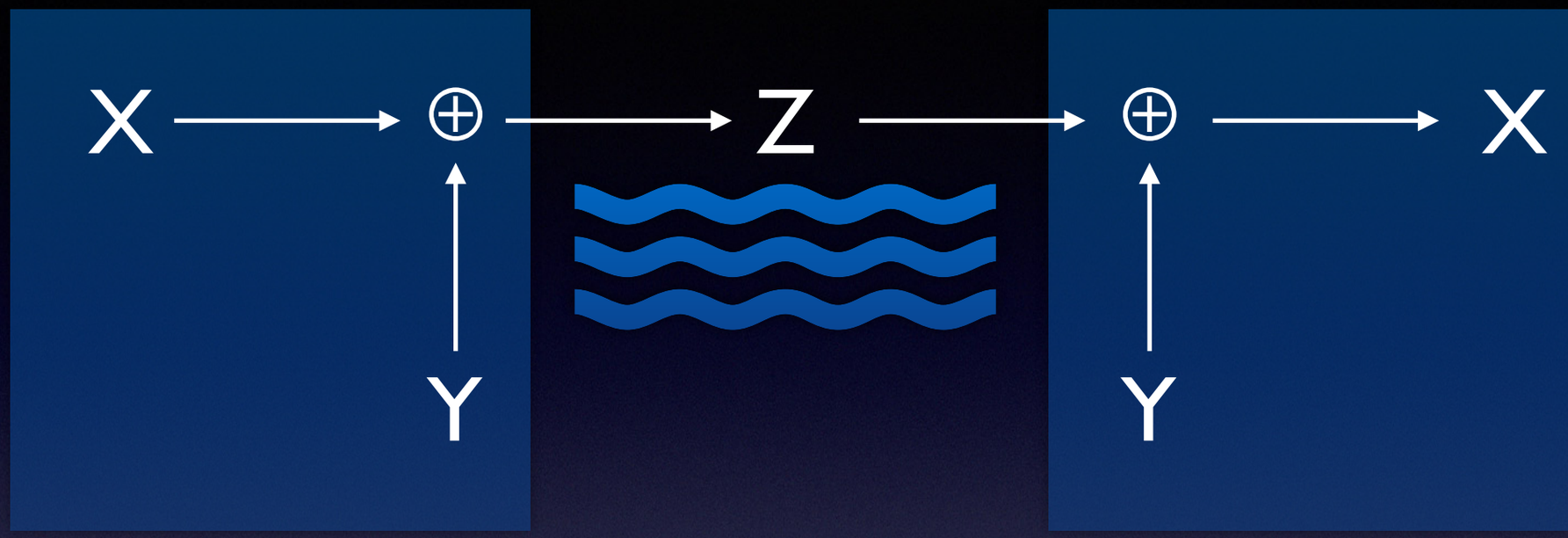
- A. B. Clark (supervisione)
- Claude Shannon
- Harry Nyquist
- Alan Turing (in visita)





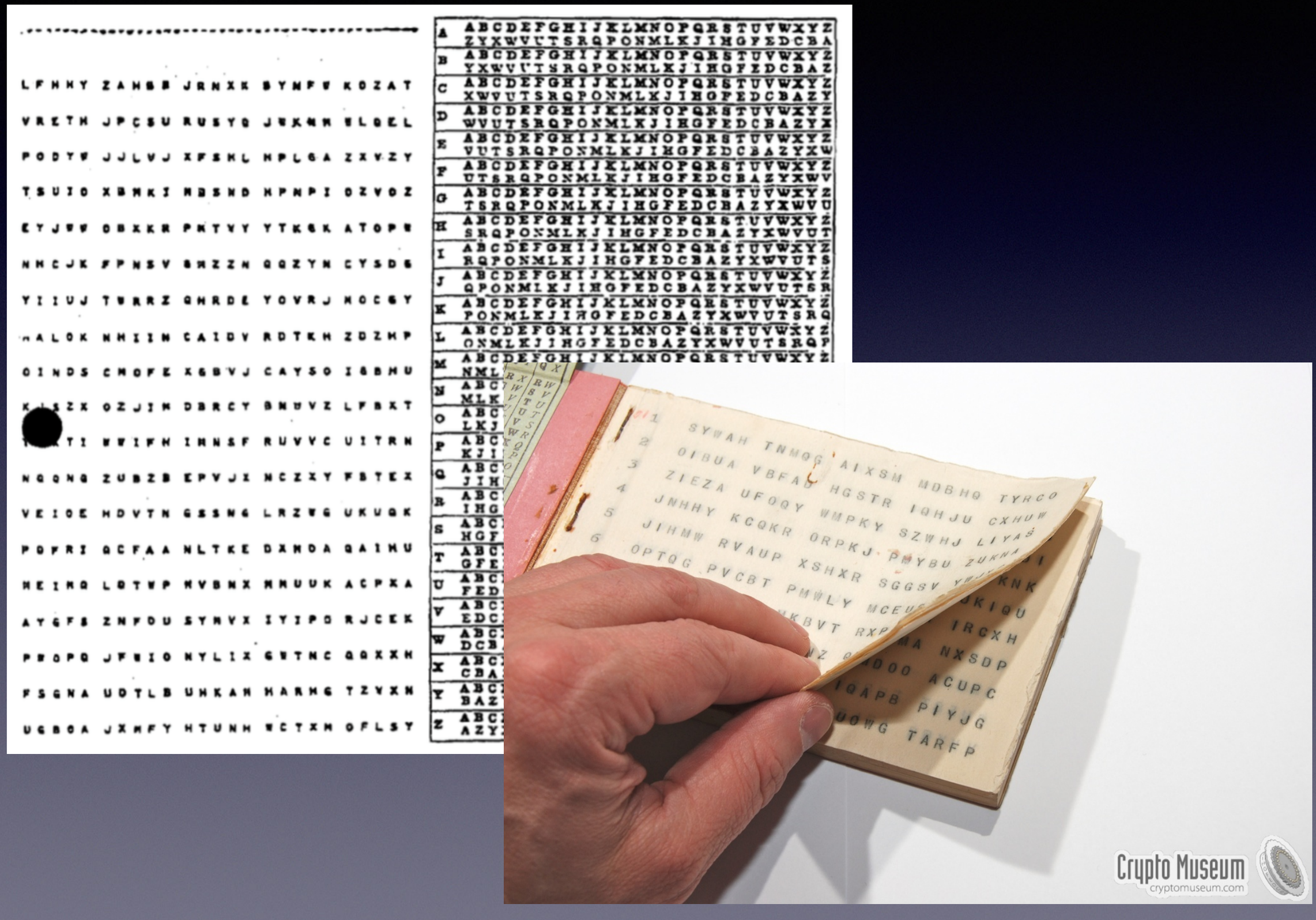
e vari altri ingegneri e matematici

Schema astratto del SIGSALY



- X: un bit di informazione da trasmettere
- Y: un bit di rumore, generato casualmente
- Z=X⊕Y: il bit trasmesso sul canale di telecomunicazione
- Se Y è una variabile aleatoria distribuita uniformemente su {0,1}, Z non fornisce *nessuna informazione* su X

Cifrario monouso (One-Time Pad)



Gli articoli di Shannon (1945, 1948)

- *A Mathematical Theory of Cryptography* (1945), memorandum segreto per i Bell Telephone Labs
- *A Mathematical Theory of Communication* (1948), Bell System Technical Journal

Sono considerati i contributi fondamentali alla Teoria dell'Informazione

Cosa studia la Teoria dell'Informazione

Studio della

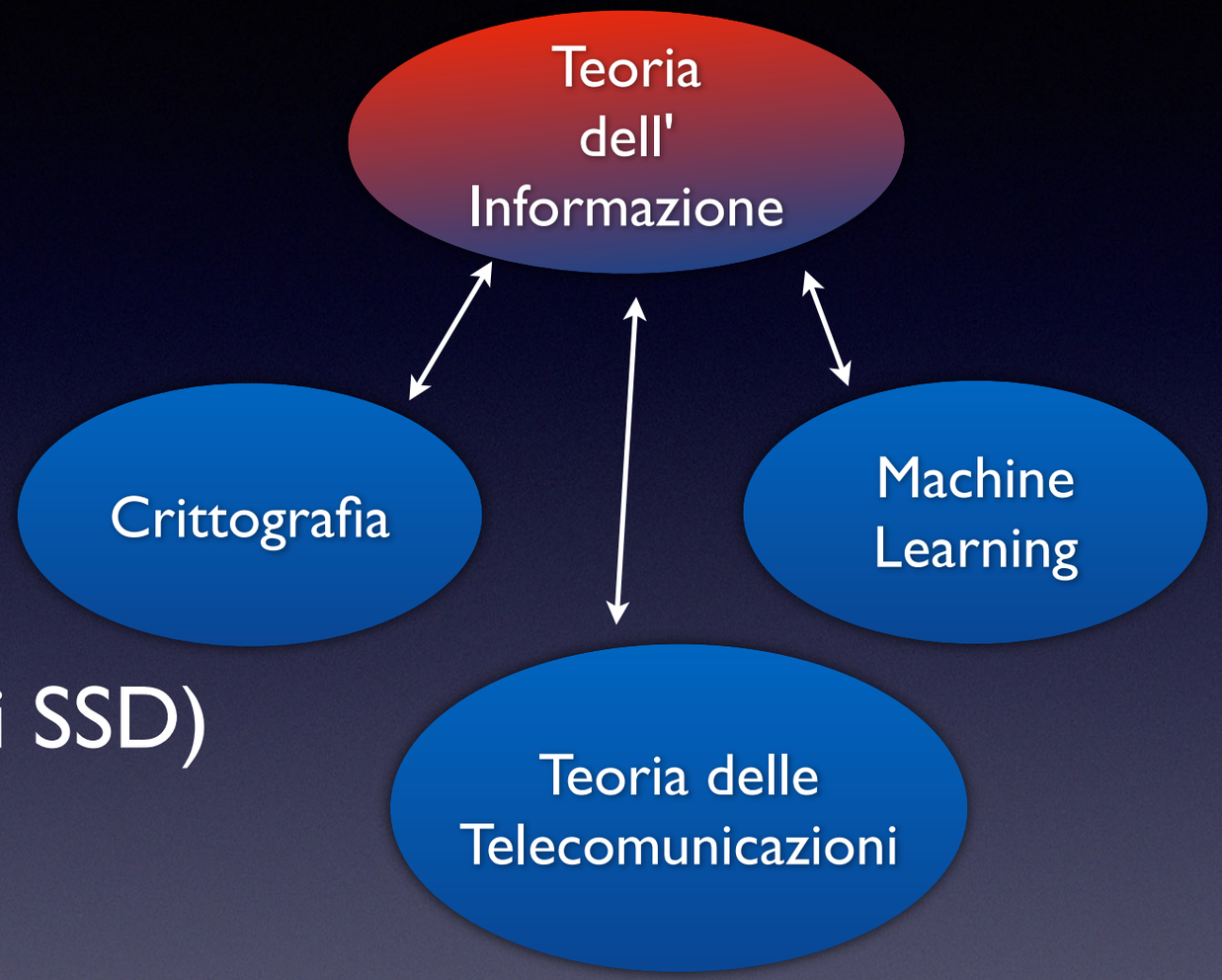
- misurazione,
- trasmissione,
- preservazione

dell'informazione

Non si focalizza sull'e*laborazione* dell'informazione

Ambiti rilevanti

- Comunicazioni remote (es.: telefonia, satelliti)
- Memorizzazione dell'informazione (es.: memorie RAM, dischi SSD)
- Inferenza statistica
- Linguistica
- Matematica pura!



TI e meccanica statistica

- L'*entropia*, concetto fondamentale della TI, è ispirato dalla meccanica statistica
  - Entropia di Boltzmann–Gibbs:

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i$$

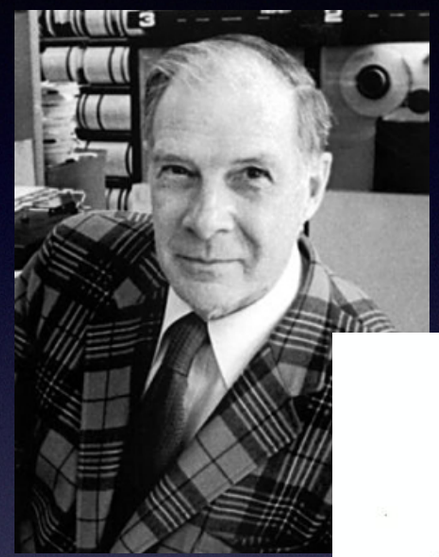
  - Entropia di Shannon:

$$H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$$

«La mia più grande preoccupazione era come chiamarla. Pensavo di chiamarla *informazione*, ma la parola era fin troppo usata, così decisi di chiamarla *incertezza*. Quando discussi della cosa con John Von Neumann, lui ebbe un'idea migliore. Mi disse che avrei dovuto chiamarla *entropia*, per due motivi: "Innanzitutto, la tua funzione d'incertezza è già nota nella meccanica statistica con quel nome. In secondo luogo, e più significativamente, nessuno sa cosa sia con certezza l'*entropia*, così in una discussione sarai sempre in vantaggio"» –Claude Shannon

TI: non solo Shannon

- Richard Hamming (1947)
- Roberto M. Fano (1949)
- David A. Huffman (1951)
- Irving Reed, Gustave Solomon (1960)



- Jacob Ziv, Abraham Lempel (1977)
- Teoria dei codici a correzione d'errore
  - Applicazioni: RAM, sonde spaziali, ...
- Teoria della compressione dati
  - Applicazioni: formati file .zip, .bzip, .jpg, .mp3, ...

TI nella matematica pura: un esempio

- Una congettura combinatoria del 1979 afferma che:
  in ogni famiglia finita (non banale) di insiemi chiusa rispetto all'unione, esiste un elemento contenuto in almeno <u>metà</u> degli insiemi
- Tale congettura rimane tuttora aperta
- Usando la TI, nel 2022 è stato dimostrato che:
  in ogni famiglia finita (non banale) di insiemi chiusa rispetto all'unione, esiste un elemento contenuto in almeno un <u>terzo</u> degli insiemi

Programma sintetico

1. ## Introduzione alla teoria dell'informazione
   Trasmissione affidabile dell'informazione. Contenuto informativo secondo Shannon. Misure di informazione. Entropia, mutua informazione, divergenza informazionale. Compressione dati. Correzione d'errore. Teoremi di elaborazione dei dati. Disuguaglianze fondamentali. Diagrammi d'informazione. Divergenza informazionale e massima verosimiglianza.

2. ## Codifica di sorgente e compressione dati
   Sequenze tipiche. Tipicità in probabilità. Proprietà di equipartizione asintotica. Codifica a blocco e a lunghezza variabile. Tasso di codifica. Teorema della codifica di sorgente. Compressione dati senza perdita. Codice di Huffman. Codici universali. Compressione Ziv-Lempel.

3. ## Codifica di canale
   Capacità di canale. Canali discreti senza memoria. Informazione trasportata da un canale. Criteri di decodifica. Teorema della codifica di canale con rumore.

4. ## Codici correttori ed applicazioni
   Spazio di Hamming. Codici lineari. Matrice generatrice e matrice di controllo. Codici di Hamming. Codici hash.

Trasmissione dell'informazione

- *Sorgente* e *destinazione* della trasmissione
- *Canale* di trasmissione (affetto da possibili errori)
- *Codifica di sorgente*: elimina ridondanza nei dati (per rendere più e*fficiente* la trasmissione)
- *Codifica di canale*: aggiunge ridondanza utile a proteggere l'informazione da errori di trasmissione (per rendere più *affidabile* la trasmissione)

Un esempio di codifica di sorgente

Run-Length Encoding: (usata negli scanner e nei file .PNG)

- Rimpiazza ripetizioni dello stesso simbolo con la coppia *(lunghezza della ripetizione, simbolo)*
- Esempio: `N` = pixel nero, `B` = pixel bianco
  - `NNNNNBNNNNNNNBBBNN`
    diventa
    `5N1B6N3B2N`

Nota: non sempre la lunghezza del messaggio è ridotta:

- `NBNBNBNBNB`
  diventa
  `1N1B1N1B1N1B1N1B1N1B`

Un esempio di codifica di canale

Codice binario a ripetizione di lunghezza 3:

- Codifica: rimpiazza `0` con `000`, `1` con `111`
- Decodifica: restituisci il simbolo che appare *più volte* in ogni terzetto ricevuto
- Esempio: `100` è decodificato come `0`, `101` come `1`
- Riesce a *correggere* fino ad 1 errore ogni 3 bit trasmessi
- Riesce a *rilevare* fino a 2 errori ogni 3 bit trasmessi