Università degli Studi Roma Tre
AL110 Algebra 1, a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi 9

1. Usando il Piccolo Teorema di Fermat verificare che i seguenti numeri non sono primi: 33, 45, 12.

2. Calcolare $[2^{340}]_{341}$. Possiamo concludere che 341 è primo?

3.Dimostrare che se n è un numero composto dispari, privo di quadrati, tale che per ogni p che divide n si ha che $p-1$ divide $n-1$, allora

$$b^{n-1} \equiv 1 \bmod n$$

per tutti i b coprimi con n. (Vale anche il viceversa ma è più difficile). Tali numeri sono chiamati numeri di Carmichael.

4. Dimostrare che se b è tale che

$$b^{n-1} \equiv 1 \bmod n$$

per tutti i b coprimi con n, allora b è dispari.

5 Dimostrare che se n è un numero composito tale che per ogni primo p che divide n si ha che $p-1$ divide $n-1$, allora n ha almeno 3 fattori distinti.

6 Assumendo la caratterizzazione dei numeri di Carmichael dell'esercizio 4 (e cioè che un numero composito dispari, privo di quadrati, n è un numero di Carmichael se e soltanto se per ogni p che divide n si ha che $p-1$ divide $n-1$) verificare che 561 è il più piccolo numero di Carmichael (aiutandosi con un software di calcolo).

7

a. Calcolare $\phi(n)$ per ogni $n \leq 100$.
b. Calcolare $\phi(n)$ nei seguenti casi: $n = 1729, 1100, 1313, 2^3 5^3 7^2$.

8. Calcolare

$$5^{95} \bmod 100 \qquad 2^{1000} \bmod 200 \qquad 3^{905} \bmod 341$$

9. Scrivere i seguenti numeri razionali: $\frac{3}{7}, \frac{11}{30}, \frac{4}{9}$ in base 10, 2, 3, e 13.

10. Scrivere i seguenti numeri razionali (scritti in forma posizionale in base 10) sotto forma di frazione:

$$0,58 \quad 0,5\overline{8} \quad 0,\overline{58} \quad 1,0\overline{01} \quad 1,\overline{001} \quad 1,27\overline{31} \quad 1,273\overline{1} \quad -2,11\overline{7} \quad -2,1\overline{17} \quad -2,\overline{117}$$

11. Scrivere i seguenti numeri razionali (scritti in forma posizionale in base 7) sotto forma di frazione:

$$0,58 \quad 0,5\overline{8} \quad 0,\overline{58} \quad 1,0\overline{01} \quad 1,\overline{001} \quad 1,27\overline{31} \quad 1,273\overline{1} \quad -2,11\overline{7} \quad -2,1\overline{17} \quad -2,\overline{117}$$