

1. Sia A un anello commutativo con identità. Un elemento $c \in A$ si dice cancellabile se

$$ca = cb \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in A$$

- a) Dimostrare che le unità sono cancellabili.
- b) Dimostrare che a non è cancellabile se e soltanto se a è uno zero-divisore.

2. Sia A un anello commutativo con identità e sia ρ la relazione $a\rho b$ se e solo se a e b sono associati.

- a) Provare che ρ è una relazione di equivalenza in A .
- b) Sia $A = \mathbb{Z}$
 - Determinare \mathbb{Z}/ρ
 - È vero che $[a] + [b] = [a + b]$ è una operazione ben definita in \mathbb{Z}/ρ ?
- c) Sia $A = \mathbb{Q}$, determinare \mathbb{Q}/ρ

3. Dare un esempio di anello non commutativo.

4. Sia $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Dimostrare che \mathbb{C} è un campo.

5. Per ogni coppia di numeri qui sotto calcolare il loro MCD e dare esplicitamente una identità di Bezout.

- a) (440; 100)
- b) (220; 121)
- c) (680; 324)
- d) (2240; 1024)
- e) (1134; 525)
- f) (39758; 54573)

6. Determinare un numero $a \in \mathbb{Z}$ tale che $\{16h + 18k \mid h, k \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z}$ dove $a\mathbb{Z} = \{at \mid t \in \mathbb{Z}\}$

7.

- a) Calcolare il MCD di 11501 e 525. Determinare poi il loro mcm.
- b) Dare esplicitamente una identità di Bezout per il MCD(11501, 525).
- c) Determinare per quali valori di ℓ la seguente equazione

$$11501X + 525Y = \ell$$

è risolubile

8. Dire, motivando la risposta, quali delle seguenti equazione ammettono soluzioni:

- a) $324x + 81y = 26$
- b) $324x + 81y = 27$
- c) $36x + 90y = 54$.

9. Calcolare il minimo comune multiplo delle seguenti coppie d'interi

- a) (120; 32)
- b) (222; 259)
- c) (1404; 2295)
- d) (630; 3315)