Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Tutorato 13
29 Maggio 2015

1. Data una matrice M, si definisce la **traccia** di M come la somma degli elementi sulla diagonale principale. Verrá denotata con $Tr(M)$.

   Siano A e B due matrici simili. Dopo aver ricordato che $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ mostrare che:

   (a) $tr(A) = tr(B)$;

   (b) A^n e B^n sono simili.

   (Suggerimento: osservare che data una matrice quadrata $A = (a_{i,j})$ allora $Det(A - \lambda\mathbb{I}) = (-\lambda)^n \pm tr(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda)$ dove $deg(q) \leq n - 2$.)

2. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,
   $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

3. Si consideri la seguente matrice simmetrica:
   $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

   (a) Stabilire se A é invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};

   (b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;

   (c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D é una matrice diagonale.

4. Si consideri la matrice
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se A é diagonalizzabile.

5. Stabilire se le seguenti applicazioni da $M_3(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ sono lineari e in caso affermativo dire se sono suriettive e trovare il nucleo:

(a) L'applicazione determinante $Det : M \mapsto Det(M)$;

(b) L'applicazione traccia $Tr : M \mapsto Tr(M)$.

6. Data la matrice:
$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$:

   (a) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$;

   (b) Posto $a = 0$, esistono 3 autovettori di A linearmente indipendenti?

7. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$