Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Tutorato 12
19 Maggio 2015

1. In R^3 si considerino le basi: $B_1 = \{(1;1;1);(0;2;3);(1;0;3)\}$; $B_2 = \{(4;3;1);(0;1;2);(1;0;1)\}$.
   Determinare la matrice P del cambiamento di base da B_1 a B_2.
   Determinare la matrice Q del cambiamento di base da B_2 a B_1.

2. Sia P^3 lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata di grado minore di 3 a coefficienti reali e $F : P^3 \to P^3$ l'applicazione lineare tale che $F(X^n) = nX^{n-1}$ (derivata formale). Calcolare nucleo e immagine di F e trovare $M_e(F)$ e $M_b(F)$, dove e é la base $\{1; X; X^2; X^3\}$ e b é la base $\{1; 1+X; 1+X+X^2; 1+X+X^2+X^3\}$.

3. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ cui, rispetto alla base canonica, é associata la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 11 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$ con $h \in \mathbb{R}$.
   Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva:

   - determinare $Im(f)$;
   - determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k)$ appartiene a $Im(f)$;
   - trovare un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;
   - determinare $Ker(f)$;
   - verificare che $Ker(f) \cap Im(f) = \{\underline{0}\}$;
   - esistono dei vettori $u \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(u) = (3, 2, -2)$?
   - trovare i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(x)$, dove $f(x) = (1, 2, -1)$.

4. In R^3 si consideri l'endomorfismo f dato da:

$$\begin{cases} f(i) - f(j) - f(k) = 0 \\ 2f(i) - f(j) = 3i + 2j - k \\ -f(i) + f(j) = 3i - j + 2k \end{cases}$$

   (a) f é iniettivo? f é suriettivo?
   (b) Trovare $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (c) Determinare $\{t \in R | v = (t+1; 2t; -1) \in Im(f)\}$.

(d) Per il valore di t ottenuto, calcolare le componenti del vettore rispetto alla base di $Im(f)$.
(e) Trovare un vettore x che non appartenga all'immagine.
(f) $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta?
(g) Determinare le controimmagini del vettore $u = (3; 4; -1)$.

5. Siano $v = \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$ e $w = \{(1; 0; 1; 1); (1; 1; 1; 0); (0; 0; 1; 1); (1; 0; 1; 1)\}$ due basi rispettivamente di R^3 e R^4 e F, G, H, I le seguenti applicazioni lineari:
$F : R^3 \to R^3 : F(x; y; z) = (x + z; x + 2y; 2x + 3y + z)$;
$G : R3 \to R^4 : G(x; y; z) = (x + z; x + y + z; x + y + 2z; 2x + y + 2z)$;
$H : R^4 \to R^3 : H(x; y; z; t) = (x + 2z + t; x - y - z + t; y - t)$;
$I : R^4 \to R^4 : I(x; y; z; t) = (x + z + t; 2x + y + t; x - y - 2z + t; y - z + t)$.
Determinare le matrici associate a tali applicazioni: $M_v(F); M_{w;v}(G); M_{v;w}(H)$ e $M_w(I)$.