Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez
Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 13
29 Maggio 2015

1. Data una matrice M, si definisce la **traccia** di M come la somma degli elementi sulla diagonale principale. Verrá denotata con $Tr(M)$.

   Siano A e B due matrici simili. Dopo aver ricordato che $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ mostrare che:

   (a) $tr(A) = tr(B)$;

   (b) A^n e B^n sono simili.

   (Suggerimento: osservare che data una matrice quadrata $A = (a_{i,j})$ allora $Det(A - \lambda\mathbb{I}) = (-\lambda)^n \pm tr(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda)$ dove $deg(q) \leq n - 2$.)

   Soluzione:

   Se A e B sono due matrici simili allora possiamo scrivere $A = MBM^{-1}$, dove $M \in GL_n(K)$. Allora come giá visto a lezione si ha:

   $P_A(\lambda) = Det(A - \lambda\mathbb{I}) = Det(MBM^{-1} - \lambda\mathbb{I}) = Det(MBM^{-1} - M\lambda\mathbb{I}M^{-1})$
   $= Det(M(B - \lambda\mathbb{I})M^{-1}) = Det(M)Det(B - \lambda\mathbb{I})(Det(M))^{-1}$
   $= Det(B - \lambda\mathbb{I}) = P_B(\lambda)$.

   (a) Usando il risultato appena richiamato si ha $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.
   Supponiamo dapprima $n = 2$ e scriviamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $Det(A - \lambda\mathbb{I}) = Det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) =$
   $\lambda^2 - tr(A)\lambda + Det(A) = \lambda^2 - tr(B)\lambda + Det(B) \Rightarrow tr(A) = tr(B)$.
   In generale se $A = (a_{i,j}) \Rightarrow Det(A - \lambda\mathbb{I}) = (-\lambda)^n \pm tr(A)\lambda^{n-1} + q(\lambda)$ dove $deg(q) \leq n - 2$ e le conclusioni sono le stesse.

   (b) Sappiamo che esiste $M \in GL_n(K)$ tale che $M^{-1}AM = B$. É allora sufficiente notare che

   $$B^n = (M^{-1}AM)^n = M^{-1}AMM^{-1}AM...M^{-1}AM = M^{-1}A^nM.$$

2. Trovare gli autovalori e gli autovettori delle seguenti matrici:

   $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Stabilire poi se sono o meno diagonalizzabili.

Soluzione:

Gli autovalori di una matrice M sono le radici del polinomio caratteristico; questo si ottiene ponendo uguale a zero il determinante della matrice $M - \lambda\mathbb{I}$.

- $P_\lambda(A) = Det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 2) = 0.$

  Si ottengono allora gli autovalori $\lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$.

  Gli autospazi V_{λ_i} relativi agli autovalori λ_i corrispondono al nucleo dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice $A - \lambda_i\mathbb{I}$, quindi gli elementi dell'i-esimo autospazio sono tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda_i\mathbb{I})\underline{x} = \underline{0}$, dove $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

  In questo caso:

  $V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$

  $\left\{ (t,0,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ e dunque $(1,0,1)$ é un autovettore relativo all'autovalore 2.

  Operando allo stesso modo si trova che $V_{\lambda_2} =< (1, -\sqrt{2}, 1) >$ e $V_{\lambda_3} =< (1, \sqrt{2}, 1) >$.

  Affinché la matrice sia diagonalizzabile é necessario che per ogni autovalore la molteplicitá algebrica sia uguale alla molteplicitá geometrica. In generale la prima é sempre maggiore o uguale della seconda. Notiamo che se tutti gli autovalori sono tutit distinti, la matrice é diagonalizzabile, in quanto se λ é un autovettore il suo autospazio associato deve avere dimensione maggiore o uguale a 1 e la molteplicitá algebrica é uguale a 1. Per quanto detto prima segue subito la diagonalizzabilitá della matrice.

- B

  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4 - \sqrt{2}, \lambda_3 = 4 + \sqrt{2}$.

  $V_{\lambda_1} =< (2,3,1) >$,

  $V_{\lambda_2} =< (4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1) >$,

  $V_{\lambda_3} =< (4 + 3\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 1) >$.

  Diagonalizzabile.

- C

  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$.

  $V_{\lambda_1} =< (-1,0,2) >$,

  $V_{\lambda_2} =< (0,1,0) >$,

  $V_{\lambda_3} =< (2,0,1) >$.

  Diagonalizzabile.

- D

  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ (con molteplicitá algebrica 2), $\lambda_3 = 3$.

  $V_{\lambda_1} =< (1,1,1,1) >$,

  $V_{\lambda_2} =< (0,0,0,1), (-1,0,1,0) >$,

  $V_{\lambda_3} =< (1,-2,1,0) >$.

  Diagonalizzabile.

- E
  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$(con molteplicitá 2), $\lambda_3 = 2$.
  $V_{\lambda_1} =< (0,1,1,0) >$,
  $V_{\lambda_2} =< (0,0,0,1),(1,0,0,0) >$,
  $V_{\lambda_3} =< (0,-1,1,0) >$.
  Diagonalizzabile.

3. Si consideri la seguente matrice simmetrica:
   $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

   (a) Stabilire se A é invertibile e, in caso affermativo, determinare A^{-1};

   (b) Calcolare gli autovalori e gli autospazi di A;

   (c) Determinare una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$, dove D é una matrice diagonale.

   Soluzione:

   (a) $det(A) = 7 \Rightarrow A$ é invertibile e $A^{-1} = \frac{(Cof(A))^t}{det(A)} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

   (b) $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = -(\lambda-7)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1$ con molteplicitá algebrica 1 e 2 rispettivamente.
   Calcolando gli autospazi nel modo usuale otteniamo:
   $V_1 =< (1,-2,-1) >, V_2 =< (2,1,0),(1,0,1) >$.
   Osservazione: per ogni autovalore la molteplicitá algebrica e geometrica coincidono, dunque $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Otteniamo allora una base diagonalizzante per A:
   $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

   (c) Secondo la base $\mathcal{B}$ la matrice che rappresenta l'operatore associato ad A é la seguente matrice diagonale:
   $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Ora se $\mathcal{E}$ é la base canonica otteniamo:
   $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathbb{I})AM_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathbb{I}) = D$
   da cui, mettendo in colonna le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base canonica:
   $P^{-1} = M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $P = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathbb{I}) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathbb{I})^{-1}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dopo aver trovato l'endomorfismo a essa associato, si verifichi se A é diagonalizzabile.

   Soluzione:

   Se T é l'endomorfismo associato alla matrice A allora T é definito da $T(x, y, z) = (0, z, -y)$.

   Il polinomio caratteristico di A é $P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda^2+1)$, dunque A ha un solo autovalore reale con molteplicitá algebrica 1 e di conseguenza l'autospazio generato dall'autovettore associato a tale λ avrá dimensione 1. Ne segue che A non é diagonalizzabile.

5. Stabilire se le seguenti applicazioni da $M_3(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ sono lineari e in caso affermativo dire se sono suriettive e trovare il nucleo:

   (a) L'applicazione determinante $Det : M \mapsto Det(M)$;

   (b) L'applicazione traccia $Tr : M \mapsto Tr(M)$.

   Soluzione:

   (a) Abbiamo giá visto che in generale $Det(A + B) \neq Det(A) + Det(B)$, dunque l'applicazione $Det(-)$ non puó essere lineare.

   (b) Per come é definita la traccia é evidente che $kTr(A) = Tr(kA)$ e che $Tr(A+B) = Tr(A)+Tr(B) \quad \forall A, B \in M_3(\mathbb{R}), k \in \mathbb{R}$, dunque $Tr(-)$ é un'applicazione lineare. Anche la suriettivitá dell'applicazione é evidente: per ogni $x \in \mathbb{R}$ é infatti sufficiente considerare, ad esempio, la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$
   Per il teorema di nullitá piú rango la dimensione del nucleo é 8, infatti $dim(Ker(Tr(-))) = dim(M_3(\mathbb{R})) - dim(\mathbb{R}) = 9 - 1 = 8$. Ne segue che gli elementi del nucleo hanno 8 parametri liberi.

   Banalmente le entrate della matrice che non sono sulla diagonale possono variare a piacimento e la sola condizione sui parametri é che la traccia sia nulla. Ne segue che tutti e soli gli elementi del nucleo saranno della forma
   $$A = \begin{pmatrix} -x & a & b \\ c & -y & d \\ e & f & x+y \end{pmatrix}$$
   al variare dei parametri $a, b, c, d, e, f, x, y \in \mathbb{R}$.

6. Data la matrice:
$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}:$$

(a) Determinare per quali valori del parametro a la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$;

(b) Posto $a = 0$, esistono 3 autovettori di A linearmente indipendenti?

Soluzione:

(a) In generale λ é un autovalore per l'applicazione f rappresentata dalla matrice A se e solo se $Det(A - \lambda\mathbb{I} = 0)$. Affinché λ sia un autovalore é infatti necessario che il relativo autospazio sia non banale. Ne segue che anche il nucleo di $A - \lambda\mathbb{I}$ deve essere non banale, ossia l'applicazione a esso associata non deve essere iniettiva. In particolare non sará un isomorfismo. Dal momento che g é un isomorfismo se e solo se la matrice a esso associata ha determinante non nullo é sufficiente stabilire per quali valori di a $\lambda = 1$ é un autovettore. Questo si ha quando $Det(A - 1\mathbb{I}) = 0$ ed essendo
$$Det\begin{pmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 4a$$
otteniamo che 1 é un autovalore per $A \Leftrightarrow a = 0$.

(b) Posto $a = 0$ esistono tre autovettori linearmente indipendenti se e solo se la matrice A é diagonalizzabile; infatti solo in questo caso si puó scrivere una base dello spazio d'arrivo con soli autovettori. In questo caso:
$$P_\lambda(A) = Det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
e dunque $P_\lambda(A) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$. A é allora diagonalizzabile se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2.

Posto $\lambda = 1$, affinché A sia diagonalizzabile il rango di $A - 1\mathbb{I}$ deve essere 1; in questo modo per il teorema di Kronecker-Rouché- Capelli il sistema omogeneo avrá ∞^2 soluzioni, quindi l'autospazio relativo all'autovalore 1 avrá dimensione 2.

Tuttavia $r(A - \mathbb{I}) = 2$, in quanto esiste un minore orlato di ordine due non nullo. Quindi per l'autovalore 1 la molteplicitá algebrica (uguale a 2) é diversa da quella geometrica (uguale a 1), quindi la matrice non é diagonalizzabile, e dunque non é possibile trovare tre vettori linearmente indipendenti.

7. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

La matrice considerata ha determinante nullo, dunque un nucleo non banale. Ricordiamo che il nucleo é l'autospazio relativo all'autovalore 0. Cerchiamo allora il nucleo dell'applicazione associata alla matrice nel modo usuale (risolviamo il sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti la nostra matrice). Come é immediato verificare, il sistema ha una sola equazione indipendente e dunque la dimensione del nucleo (e quindi la moltiplicitá geometrica di 0 come autovalore) é $7-1=6$. Ne segue che la molteplicitá algebrica di 0 é maggiore uguale a 6.

Vogliamo stabilire la molteplicitá algebrica di 0 per poter determinare il polinomio caratteristico. Notiamo che il vettore $(1,1,1,1,1,1,1)$ ha per immagine il vettore $(49,49,49,49,49,49,49)$ e dunque anche 49 é autovalore con molteplicitá geometrica almeno 1. Se ne deduce allora che il polinomio caratteristico é (a meno del segno): $P(\lambda)=\lambda^6(\lambda-49)$.