Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE110

A.A. 2014-2015 - Docente: Prof. Angelo Felice Lopez

Tutori: Federico Campanini e Giulia Salustri

Soluzioni Tutorato 11
12 Maggio 2015

1. Esiste un applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che $ker(f) = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 2z = 0\}$?

   Soluzione:

   Per stabilire se esiste un'applicazione siffatta cerchiamo una base del nucleo di f (supponendo che f esista).

   $Ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z = 2z = 0\}$, dunque i vettori del nucleo sono della forma $(-2y, y, 0, t)$, con $y, t \in \mathbb{R}$. Ne deduciamo allora che $dim(Ker(f)) = 2$ e per il teorema di nullitá piú rango $dim(Im(f)) = 2$. Non puó esistere allora un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, in quanto la dimensione dell'immagine é in ogni caso minore della dimensione del codominio.

2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da:

   $f(x, y, z) := (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$.

   (a) Dire se f é suriettivo. In caso negativo, determinare un vettore v tale che $f^{-1}(v) = \emptyset$.

   (b) Dire se f é iniettivo. In caso negativo, determinare due vettori a e b in $\mathbb{R}^3$ tali che $a \neq b$ ma $f(a) = f(b)$.

   (c) Sia $E =< u, w >$, dove $u = (1, 0, 1)$ e $w = (0, 1, 1)$. Dire se il vettore $x = (4, 3, -2) \in f(E)$.

   Soluzione:

   (a) Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$, dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ é una base fissata. Nel nostro caso, prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che f non é suriettivo perché lo spazio di arrivo ha dimensione tre mentre $dim(Im(f)) = 2$.

   Il vettore cercato sará un qualsiasi vettore che non appartiene all'immagine, quindi un vettore che non puó essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base di Im(f); é allora succifiente prendere un vettore che sia linearmente indipendente rispetto ad essi, per esempio $v = (0; 1; 0)$.

   (b) L'operatore non é iniettivo perché per il teorema nullitá piú rango il suo nucleo non é banale (ha dimensione 1). Un vettore nel nucleo risolverá il sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo ad esempio $k = (1, -1, -1)$. Abbiamo quindi che $f(v) = f(v + k)$ ma $v \neq v + k \quad \forall v \notin ker(f)$.

(c) $f(E)$ é il sottospazio $< f(v); f(w) >=< (2, 2, -1), (2, 1, 1) >$. Si ha quindi che $x \in f(E)$ se puó essere scritto come combinazione lineare della base, ossia deve essere nullo il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tale determinante é peró diverso da 0, dunque $x \notin f(E)$.

3. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine:

(a) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (2z - x, x + y, x + 2y + 2z);$

(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \qquad (x, y) \mapsto (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y);$

(c) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - y + z).$

Soluzione:

(a) Cominciamo con il verificare che F é un'applicazione lineare. Presi $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e $w = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ abbiamo che $F(v+w) = F(a+d, b+e, c+f) = (2(c+f)-(a+d), (a+d)+(b+e), (a+d)+2(b+e)+2(c+f)) = ((2c-a)+(2f-d), (a+b)+(d+e), (a+2b+2c)+(d+2e+2f)) = (2c-a, a+b, a+2b+2c)+(2f-d, d+e, d+2e+2f) = F(v)+F(w)$.
Inoltre abbiamo che, preso $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^3$, con $v = (a, b, c)$, vale $F(kv) = F(ka, kb, kc) = (2kc-ka, ka+kb, ka+2kb+2kc) = (k(2c-a), k(a + b), k(a + 2b + 2c)) = k(2c - a, a + b, a + 2b + 2c) = kF(v)$.
Per determinare l'immagine basta osservare che in generale $Im(F) =< F(e_1), F(e_2), F(e_3) >$, dove con $\{e_1, e_2, e_3\}$ indichiamo i vettori di una base fissata. Nel nostro caso, prendendo come base la base canonica di $\mathbb{R}^3$, otteniamo che $Im(F) =< (-1, 1, 1), (0, 1, 2), (2, 0, 2) >=< (0, 1, 2), (2, 0, 2) >$. Possiamo quindi concludere che $dim(Im(F)) = 2$ e che, per il teorema di nullitá piú rango, $dim(ker(F)) = 1$.
Per determinare il nucleo di F basta porre $F(v) = (0, 0, 0)$ e risolvere il sistema omogeneo con il metodo di Gauss-Jordan (non é l'unico modo di trovare le soluzioni). Cosí facendo troviamo che $ker(F) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = (t, -t; \frac{t}{2}), t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $Im(F) =< (1, 2, 0, 3), (-2, 1, 5, -1) >$, $ker(F) = (0, 0)$.

(c) $Im(F) =< (1, 1), (-1, 1), (-1, 1) >=< (1, 1), (-1, 1) >= \mathbb{R}^2$.
Il nucleo avrá quindi dimensione 1 e per trovarlo imponiamo $F(v) = (0, 0)$, ottenendo $ker(F) = (0, t, t)$.

4. Si consideri la seguente matrice associata ad un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ (rispetto alla base canonica):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix} \qquad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

É possibile determinare univocamente A sapendo che f non é iniettiva e che $f(e_1 + e_2 + e_3) = 2(e_1 + e_2)$?

Soluzione:

La matrice A é definita a meno di 4 parametri, quindi per determinarla univocamente avremmo bisogno di 4 equazioni nelle incognite $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Queste equazioni si ottengono dalle condizioni che l'esercizio impone su A. L'applicazione associata ad A non deve essere suriettiva, quindi non deve avere immagine di dimensione tre, cioé A non deve avere rango massimo ($det(A) = 0$). Inoltre il vettore di componenti $(1, 1, 1)$ debba essere mandato da f nel vettore di componenti $(2, 2, 0)$.

Abbiamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} Det(A) = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & y & -3 \\ -1 & z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 3x + 2y + 7z - 2xt + yt = 0 \\ x = -1 \\ y = 3 \\ z + t = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow x = -1 y = 3 z = -4 t = 5.$$

5. Sia f l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $dim(Ker(f))$ e $dim(Im(f))$.

Soluzione:

Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

In generale $dim(Im(f)) = r(A)$, dove A é la matrice associata a f, mentre $dim(Ker(f)) = n - dim(Im(f))$, dove n é la dimensione del dominio (teorema di nullitá piú rango).

Se $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\underline{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ si ha che $\underline{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ e $f(x) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$ in quanto f é lineare.

Dunque $f(x)$ é combinazione lineare dei vettori immagine della base canonica, ossia $Im(f) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) >$.

Tuttavia questi costituiscono le colonne della matrice associata a f, quindi $dim(Im(f)) = r(A)$, ossia il massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra i vettori immagine della base.

In questo caso $det(A) = 4$, dunque la matrice ha rango massimo. Ne segue che $dim(Im(f)) = 4$ e $dim(Ker(f)) = 4 - 4 = 0$.