Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2014-2015
AL210 - Algebra 2
Foglio di esercizi n.1
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si indichi con g' il simmetrico di g. Dimostrare che

(i) l'elemento neutro di G è unico;

(ii) ogni elemento di G ha un unico simmetrico;

(iii) $(g')' = g$, per ogni $g \in G$;

(iv) $(gh)' = h'g'$, per ogni $g, h \in G$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo e siano x, y, z suoi elementi. Dimostrare che valgono le seguenti *leggi di cancellazione*:

(i) $xy = xz \;\Rightarrow\; y = z$;

(ii) $yx = zx \;\Rightarrow\; y = z$.

Esercizio 3. A partire dalle tavole moltiplicative, costruire tutti i possibili gruppi con uno, due, tre elementi. Dedurne che questi sono tutti necessariamente commutativi e ciclici.

Esercizio 4 (Gruppo di Klein)**.** Si consideri l'insieme

$$V_4 = \{id,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\} \subseteq S_4.$$

Verificare che si tratta di un gruppo, che è abeliano e che non è ciclico. Spiegare inoltre perché non è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Esercizio 5. Determinare l'ordine di tutti gli elementi e tutti i sottogruppi dei seguenti gruppi:

a) $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_m)$ per i valori di $m = 1, 2, \dots, 12$.

b) D_3

c) D_4

d) V_4

e) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

f) $\mathbb{Z}_{12}$

g) $\mathbb{C}_8$

h) $\mathbb{C}_6$

Esercizio 6. Sia G un gruppo abeliano finito. Sia $g \in G$. Dimostrare che $o(g)$ è un divisore di $|G|$.

Esercizio 7. Per ciascuna delle seguenti permutazioni di S_9, scrivere la decomposizione in cicli disgiunti ed almeno due distinte decomposizioni in prodotto di scambi:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 1 & 7 & 4 & 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 9 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 8. Scrivere ciascuna delle seguenti permutazioni di S_7 come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di scambi:

a) $(132)(142)(152)(13)(14)$

b) $(13)(24)(13)(24)(567)(563)(14)$

c) $(123)(234)(345)(456)(567)(235)(236)(237)(237)$

d) $(137465)(2671)(354671)(24356)(127654)$